IMA 1: Analysis. Skript Woche 9

Version: 2025-11-16

Skript generiert von Gemini 2.5 Pro, gepromptet und in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

9 Ableitung

Willkommen im Herzen der Infinitesimalrechnung, einem der mächtigsten Werkzeuge, die die Mathematik für die Natur- und Ingenieurwissenschaften bereithält: der Differentialrechnung. Ihr zentrales Konzept ist die **Ableitung**. Wenn Sie verstehen, was eine Ableitung ist, wie sie funktioniert und wofür man sie verwendet, erschließen Sie sich eine völlig neue Art, dynamische Prozesse zu analysieren und zu beschreiben. Bisher haben wir uns hauptsächlich mit statischen Werten von Funktionen beschäftigt: $f(x)$ hat an der Stelle $x = 3$ den Wert 9. Nun fragen wir uns: Wie *ändert* sich eine Funktion? Und zwar nicht über ein großes Intervall, sondern in einem einzigen Augenblick?

9.1 Die Idee der Ableitung

Stellen Sie sich vor, Sie fahren mit einem Auto und protokollieren Ihre Position auf einer geraden Straße. Die Funktion $s(t)$ gibt Ihnen zu jeder Zeit t Ihre exakte Position als Länge längs der Straße an. Wenn Sie nun wissen wollen, wo Sie sich in einer sehr, sehr kurzen Zeitspanne, sagen wir einer Millisekunde ($\Delta t = 0{,}001\,\mathrm{s}$), befinden werden, benötigen Sie nicht den gesamten komplexen Funktionsverlauf. Eine sehr gute Näherung erhalten Sie, wenn Sie Ihre aktuelle Position $s(t)$ kennen und Ihre aktuelle, momentane Geschwindigkeit $v(t)$. Die neue Position ist dann annähernd:

$$s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t$$

Die Position in einer Millisekunde ist also recht genau die Position jetzt plus die Momentangeschwindigkeit mal eine Millisekunde. Diese Momentangeschwindigkeit ist nichts anderes als die Ableitung der Positionsfunktion nach der Zeit.

Ein anderes Beispiel aus der Elektrotechnik wäre die Ladung $Q(t)$ auf einem Kondensator. Die Rate, mit der sich diese Ladung ändert, ist der elektrische Strom $I(t)$. Möchten wir wissen, wie viel Ladung in einer winzigen Zeitspanne Δt hinzukommt oder abfließt, können wir wieder eine lineare Näherung verwenden:

$$Q(t + \Delta t) \approx Q(t) + I(t) \cdot \Delta t$$

Der Strom $I(t)$ ist die momentane Änderungsrate der Ladung, also die Ableitung von $Q(t)$.

In beiden Fällen beschreibt die Ableitung – die Geschwindigkeit oder der Strom – die momentane ~~lokale~~ *Änderungsrate* der ursprünglichen Funktion. Geometrisch lässt sich diese Idee wunderschön interpretieren. Die momentane Änderungsrate einer Funktion an einem bestimmten Punkt entspricht exakt der Steigung der Tangente, die den Graphen der Funktion in diesem Punkt berührt. Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graphen lokal am besten annähert. Wenn Sie also ganz nah an den Graphen heranzoomen, sieht er fast wie eine Gerade aus – eben jene Tangente. Die Steigung dieser Tangente ist der Wert der Ableitung.

Für die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x haben sich verschiedene Schreibweisen etabliert, die je nach Kontext praktisch sind:

- $f'(x)$: Die „Strich-Notation“ nach Lagrange. Sie ist kompakt und am gebräuchlichsten, wenn klar ist, nach welcher Variablen abgeleitet wird.
- $\frac{df}{dx}$: Die Notation nach Leibniz. Sie sieht aus wie ein Bruch und hat den großen Vorteil, dass sie explizit die Variable angibt, nach der differenziert wird. Dies wird unerlässlich, wenn Funktionen von mehreren Variablen abhängen.
- $\dot{f}(t)$: Die „Punkt-Notation“ nach Newton. Sie wird fast ausschließlich in der Physik und den Ingenieurwissenschaften für Ableitungen nach der Zeit t verwendet.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion und an verschiedenen Stellen die zugehörigen Tangenten. Die Steigung m der Tangente ist jeweils der Wert der Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle. Man sieht deutlich, wie sich die Steigung ändert: An den Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte) ist die Tangente waagerecht, die Steigung und damit die Ableitung ist also Null. Wo die Funktion am steilsten ansteigt, hat die Ableitung ihren größten positiven Wert. siehe Abb. 1

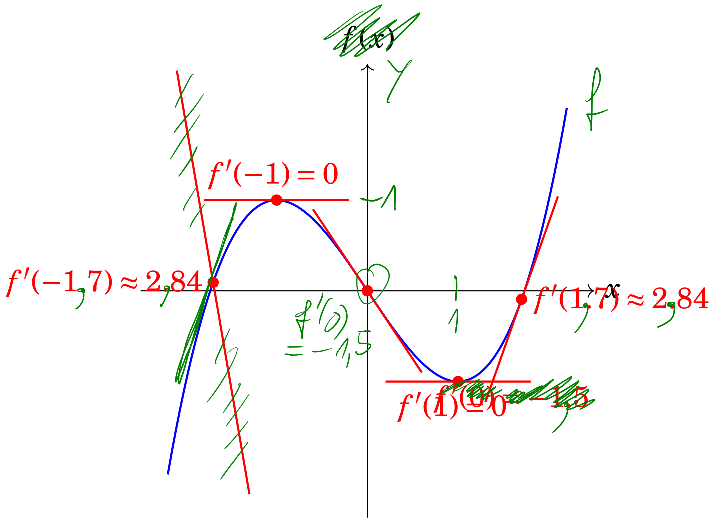


Abbildung 1: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ mit exakten Tangenten an verschiedenen Punkten. Die Steigung der Tangente ist der Wert der Ableitungsfunktion.

9.2 Ableitung als Grenzwert

Die geometrische Vorstellung der Tangente ist wunderbar anschaulich, aber wie berechnet man ihre Steigung mathematisch präzise? Dazu nähern wir uns der Tangente schrittweise an. Anstatt direkt die Steigung in *einem* Punkt zu betrachten, was schwierig ist, da wir dafür zwei Punkte benötigen, betrachten wir die Steigung einer Sekante. Eine Sekante ist eine Gerade, die den Graphen in zwei Punkten schneidet.

Wir wählen den Punkt $P(x, f(x))$, an dem wir die Ableitung wissen wollen, und einen zweiten, benachbarten Punkt $Q(x+h, f(x+h))$. Die horizontale Distanz zwischen den Punkten ist h, die vertikale Distanz ist $f(x+h)-f(x)$. Die Steigung dieser Sekante ist, wie aus der Schule bekannt, „Höhenunterschied durch Längenunterschied“:

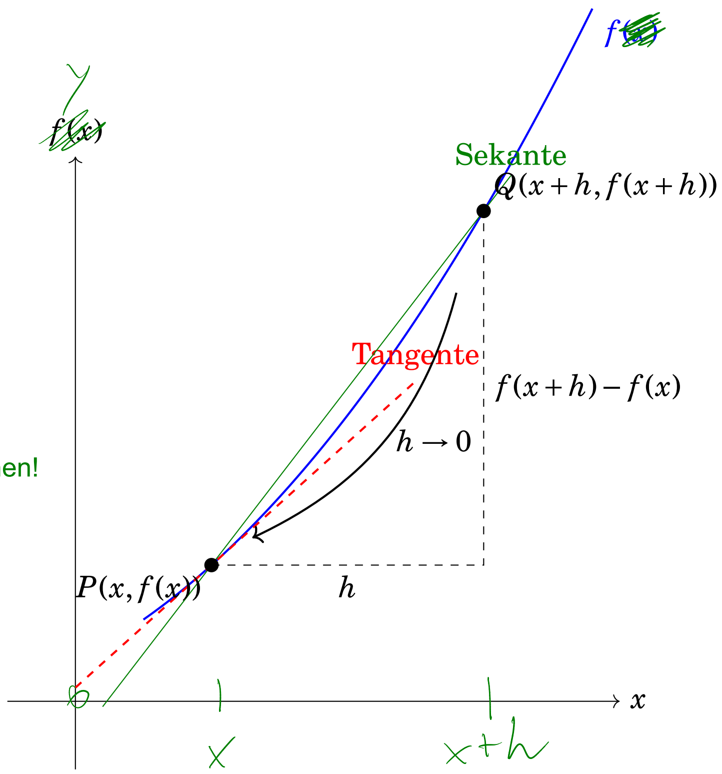
$$m_{\text{Sekante}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Dieser Ausdruck wird als **Differenzenquotient** bezeichnet. Er gibt die *durchschnittliche* Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[x, x+h]$ an.

Um nun von dieser durchschnittlichen Rate zur momentanen Rate zu gelangen, müssen wir den zweiten Punkt Q immer näher an den ersten Punkt P heranrücken lassen. Das bedeutet, wir lassen den Abstand h gegen Null gehen. Während $h \to 0$ wandert der Punkt Q auf dem Graphen auf den Punkt P zu, und die Sekante durch P und Q dreht sich in die Position der Tangente im Punkt P. Der Grenzwert der Sekantensteigungen ist also die gesuchte Tangentensteigung. siehe Abb. 2

Dies führt uns zur formalen Definition der Ableitung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Die Zeichnung könnte
übersichtlicher sein.
Zur Übung selbst machen!

Abbildung 2: Die Steigung der Sekante durch die Punkte P und Q ist der Differenzenquotient. Geht der Abstand h gegen Null, nähert sich die Sekante der Tangente im Punkt P an.

9.3 Die Ableitungsfunktion

Wenn der oben genannte Grenzwert für ein x existiert, nennen wir die Funktion f an dieser Stelle **differenzierbar**. Dies ist der Fall für die meisten Funktionen, denen wir in der Praxis begegnen; sie haben „glatte“ Graphen ohne Ecken oder Sprünge. An einer Ecke, wie sie zum Beispiel die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ bei $x = 0$ hat, kann man keine eindeutige Tangente anlegen, daher ist die Funktion dort nicht differenzierbar.

Wenn eine Funktion für alle Punkte in ihrem Definitionsbereich (oder einem Teil davon) differenzierbar ist, können wir für jeden dieser Punkte den Wert der Ableitung berechnen. Dadurch entsteht eine ~~völlig~~ neue Funktion, die wir **Ableitungsfunktion** oder kurz **Ableitung** f' nennen. Diese Funktion $f'(x)$ ordnet jedem x die Steigung des Graphen von f an der Stelle x zu. siehe Abb. 3

eine Art Maschine (also Abbildung!)

Das Ableiten, auch Differenzieren genannt, kann man sich also als ~~einen Operator~~ vorstellen, ~~eine Art Maschine~~, in die man eine Funktion f hineingibt und die eine neue Funktion f' ausgibt.

$$f \xmapsto{\text{Ableiten}} f'$$

Manchmal ist die Ausgabefunktion sogar dieselbe wie die Eingabefunktion, wie wir bei der Exponentialfunktion sehen werden. Das Ableiten ist also eine Abbildung von einer Menge von Funktionen auf eine andere Menge von Funktionen.

Interessanterweise ist diese Abbildung **linear**. Dies ist eine fundamentale Eigenschaft, die Sie aus der Linearen Algebra im Zusammenhang mit Vektoren und Matrizen kennen. Linearität bedeutet hier zweierlei: 1. Die Ableitung eines konstanten Vielfachen einer Funktion ist das konstante Vielfache der Ableitung: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. 2. Die Ableitung einer Summe von Funktionen ist die Summe der einzelnen Ableitungen: $(f + g)' = f' + g'$.

Diese beiden Eigenschaften zusammen (die Additivität und die Homogenität) machen die Ableitung zu einem linearen Operator. Das ist extrem hilfreich, da es uns erlaubt, komplizierte Funktionen in einfachere Teile zu zerlegen, diese einzeln abzuleiten und die Ergebnisse wieder zusammenzusetzen.

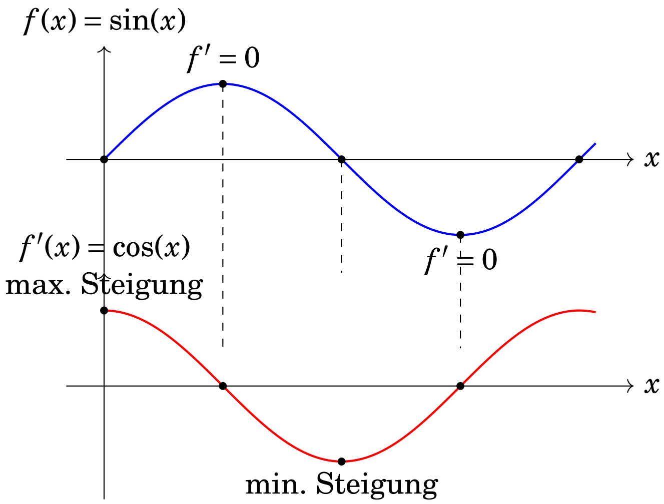


Abbildung 3: Eine Funktion $f(x) = \sin(x)$ (oben) und ihre zugehörige Ableitungsfunktion $f'(x) = \cos(x)$ (unten). An den Hoch- und Tiefpunkten von f hat f' eine Nullstelle. Dort, wo f am steilsten ansteigt oder fällt, hat f' ihre Extrema.

Kommt später dran

9.4 Ableitungsregeln

Ständig die Ableitung über den Grenzwert des Differenzenquotienten zu berechnen, wäre sehr mühsam. Glücklicherweise gibt es eine Reihe von Regeln, die es uns ermöglichen, die Ableitungen auch komplexer Funktionen systematisch und effizient zu bestimmen.

9.4.1 Produktregel

Wie leitet man das Produkt zweier Funktionen, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, ab? Man könnte naiverweise vermuten, dass das Ergebnis $f'(x) \cdot g'(x)$ ist, aber das ist falsch. Die richtige Regel lässt sich anschaulich herleiten.

Stellen wir uns ein Rechteck vor, dessen Seitenlängen von x abhängen. Die eine Seite hat die Länge $f(x)$, die andere die Länge $g(x)$. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist dann $A(x) = f(x) \cdot g(x)$. Was passiert nun mit der Fläche, wenn wir x um ein kleines Stück Δx ändern? Die Seitenlängen ändern sich dann um $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ und $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$.

Die Änderung der Gesamtfläche ΔA setzt sich aus drei neuen Teilflächen zusammen, wie in der Skizze zu sehen:

$$\Delta A = f(x) \cdot \Delta g + g(x) \cdot \Delta f + \Delta f \cdot \Delta g$$

Um die Änderungs*rate* zu bekommen, teilen wir durch Δx:

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x$$

Wenn wir nun den Grenzwert für $\Delta x \to 0$ bilden, werden aus den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta g}{\Delta x}$ die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Der letzte Term, der ein Δx enthält, wird zu Null. Übrig bleibt die **Produktregel**:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

In Worten: Ableitung des ersten Faktors mal den zweiten, plus der erste Faktor mal die Ableitung des zweiten.

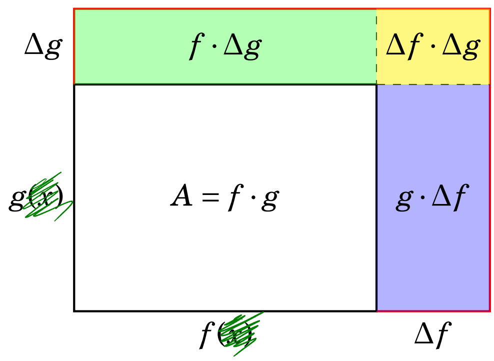


Abbildung 4: Visualisierung der Produktregel. Die Änderung der Gesamtfläche ΔA besteht aus zwei dominanten Termen (blau und grün) und einem Term zweiter Ordnung (gelb), der im Grenzwert verschwindet.

9.4.2 Kettenregel

Die Kettenregel ist eine der wichtigsten Regeln und kommt zur Anwendung, wenn Funktionen ineinander verschachtelt sind. Wir betrachten also eine Funktion der Form $h(x) = f(g(x))$.

Stellen Sie sich zwei hintereinandergeschaltete Getriebe vor. Wenn man die Antriebswelle des ersten Getriebes um 1° weiterdreht, dreht sich dessen Abtriebswelle um, sagen wir, 5° weiter. Die Rate, oder das Übersetzungsverhältnis, ist also 5. Wenn man die Antriebswelle des zweiten Getriebes um 1° weiterdreht, dreht sich dessen Abtriebswelle um 3° weiter. Sein Übersetzungsverhältnis ist also 3.

Was passiert nun, wenn wir beide Getriebe hintereinanderschalten? Eine Drehung der ersten Antriebswelle um 1° führt zu einer Drehung der Zwischenwelle um 5°. Diese 5° sind nun die Eingabe für das zweite Getriebe. Dessen Abtriebswelle dreht sich also um das 3-fache dieser Eingabe, also um 15°. Die entscheidende Erkenntnis ist: Die Raten werden bei einer Hintereinanderschaltung multipliziert!

Übertragen auf Funktionen bedeutet dies: Die Ableitung der äußeren Funktion f, ausgewertet an der Stelle der inneren Funktion $g(x)$, wird mit der Ableitung der inneren Funktion g multipliziert. Dies ist die **Kettenregel**:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Oft wird sie auch als „äußere Ableitung mal innere Ableitung“ zusammengefasst.

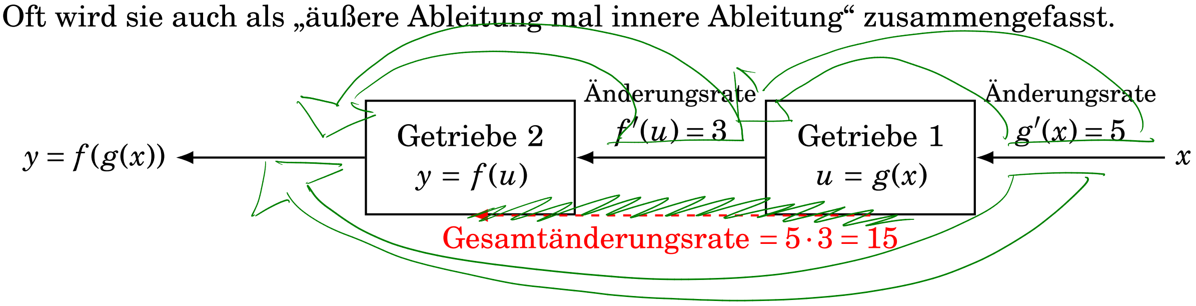


Abbildung 5: Die Kettenregel als Hintereinanderschaltung von Systemen. Die Verarbeitungskette läuft von rechts nach links, analog zur Schreibweise $f(g(x))$. Die gesamte Änderungsrate ist das Produkt der einzelnen Raten.

9.4.3 Ableitung der (natürlichen) Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat eine ganz besondere und bemerkenswerte Eigenschaft bezüglich ihrer Ableitung. Um diese zu finden, wenden wir die Grenzwertdefinition an:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Mithilfe des Potenzgesetzes $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ können wir e^x ausklammern, da es nicht von h abhängt:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Nun müssen wir den verbleibenden Grenzwert betrachten. Die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}71828...$ ist mathematisch gerade so definiert, dass dieser Grenzwert exakt 1 ist. ~~Für~~ Denn für sehr kleine h gilt die Näherung $e^h \approx 1 + h$. Setzt man dies in den Bruch ein, erhält man $(1 + h - 1)/h = h/h = 1$. Damit ergibt sich das verblüffend einfache Ergebnis:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Die natürliche Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung. Ihre Steigung ist an jeder Stelle gleich ihrem Funktionswert. Diese Eigenschaft macht sie zur fundamentalen Funktion bei der Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen, wie sie in der Elektrotechnik zum Beispiel beim Laden und Entladen von Kondensatoren und Spulen auftreten.

9.4.4 Ableitung des natürlichen Logarithmus

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus $f(x) = \ln(x)$ lässt sich elegant mithilfe der Kettenregel und der Kenntnis der Ableitung der e-Funktion finden. Wir nutzen aus, dass die Exponentialfunktion und der Logarithmus Umkehrfunktionen zueinander sind. Es gilt per Definition:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Nun leiten wir beide Seiten dieser Gleichung nach x ab. Die Ableitung der rechten Seite ist einfach $\frac{d}{dx}(x) = 1$. Die linke Seite leiten wir mit der Kettenregel ab. Die äußere Funktion ist e^u, die innere Funktion ist $u = \ln(x)$.

$$\frac{d}{dx}(e^{\ln(x)}) = \underbrace{e^{\ln(x)}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(\ln(x))}_{\text{innere Abl.}}$$

Da $e^{\ln(x)} = x$ ist, erhalten wir:

$$x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) = 1$$

Stellen wir diese Gleichung nach der gesuchten Ableitung um, finden wir:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Die Steigung der Logarithmusfunktion bei einem Wert x ist also einfach der Kehrwert $1/x$.

9.4.5 Potenzregel

Wir kennen aus der Schule die Regel $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ für ganze Zahlen n. Gilt diese Regel auch für beliebige reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$? Ja, und wir können dies nun mit unseren Werkzeugen beweisen. Der Trick besteht darin, die Potenz x^n mithilfe der e-Funktion und des Logarithmus umzuschreiben. Wir nutzen die Identität $x = e^{\ln(x)}$:

$$x^n = (e^{\ln(x)})^n = e^{n\cdot\ln(x)}$$

Diesen Ausdruck können wir nun mit der Kettenregel ableiten. Die äußere Funktion ist $f(u) = e^u$ und die innere Funktion ist $g(x) = n \cdot \ln(x)$.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(e^{n\ln(x)}) = \underbrace{e^{n\ln(x)}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(n\ln(x))}_{\text{innere Abl.}}$$

Der erste Faktor ist wieder x^n. Für den zweiten Faktor nutzen wir die Linearität der Ableitung: Die Konstante n bleibt erhalten und wir leiten $\ln(x)$ ab, was $1/x$ ergibt.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = x^n \cdot \left(n \cdot \frac{1}{x}\right) = n \cdot \frac{x^n}{x^1} = n \cdot x^{n-1}$$

Damit ist die **Potenzregel** für alle reellen Exponenten n bewiesen.

9.4.6 Quotientenregel

Die Ableitung eines Quotienten $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ lässt sich auf die Produkt- und Kettenregel zurückführen. Man muss sich also keine neue Regel von Grund auf merken, sondern kann sie herleiten. Wir schreiben den Quotienten als Produkt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (g(x))^{-1}$$

Darauf wenden wir die Produktregel an:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\right) = f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \frac{d}{dx}\left((g(x))^{-1}\right)$$

Den zweiten Term leiten wir mit der Kettenregel ab: Die äußere Funktion ist u^{-1}, die innere ist $g(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left((g(x))^{-1}\right) = -1 \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

Setzen wir dies wieder ein:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right) = \frac{f'(x)g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Bringen wir alles auf einen gemeinsamen Nenner, erhalten wir die bekannte **Quotientenregel**:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

9.4.7 Ableitungen von Sinus und Cosinus

Eine besonders elegante Herleitung für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus bietet die Eulersche Formel, die eine Brücke zwischen der Exponentialfunktion und der Trigonometrie schlägt. Für diese Formel muss das Argument x der Winkelfunktionen im Bogenmaß angegeben sein. Sie lautet:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Hier ist i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Wir leiten nun beide Seiten dieser Gleichung nach der reellen Variablen x ab und behandeln i wie eine Konstante. Die linke Seite leiten wir mit der Kettenregel ab (innere Funktion ist ix):

$$\frac{d}{dx}(e^{ix}) = e^{ix} \cdot \frac{d}{dx}(ix) = e^{ix} \cdot i$$

Setzen wir für e^{ix} wieder die Eulersche Formel ein und multiplizieren aus:

$$i \cdot (\cos(x) + i\sin(x)) = i\cos(x) + i^2\sin(x) = -\sin(x) + i\cos(x)$$

Die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung leiten wir Glied für Glied ab:

$$\frac{d}{dx}(\cos(x) + i\sin(x)) = \frac{d}{dx}(\cos(x)) + i\frac{d}{dx}(\sin(x))$$

Nun müssen wir nur noch die beiden Ergebnisse gleichsetzen und die Real- und Imaginärteile vergleichen:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(\cos(x))}_{\text{Realteil}} + i\underbrace{\frac{d}{dx}(\sin(x))}_{\text{Imaginärteil}} = \underbrace{-\sin(x)}_{\text{Realteil}} + i\underbrace{\cos(x)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Durch Vergleich der Realteile und der Imaginärteile erhalten wir direkt die beiden Ableitungsregeln:

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$$

Diese zyklische Natur der Ableitungen von Sinus und Cosinus ist die mathematische Grundlage für die Beschreibung von Schwingungen und Wellen, einem zentralen Thema in der gesamten Elektrotechnik.