IMA 1: Analysis. Skript Woche 10

Version: 2025-12-07

Skript generiert von Gemini 3 Pro Preview, gepromptet und in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

10 Lineare Näherung, numerisches Ableiten, Newton-Verfahren

In der ingenieurwissenschaftlichen Praxis haben wir es oft mit Problemen zu tun, für die der Taschenrechner keine direkte Taste hat oder bei denen uns die exakte Funktionsvorschrift fehlt. In diesem Kapitel lernen wir Methoden kennen, um komplizierte Funktionen durch einfache Geraden zu ersetzen, aus bloßen Datenpunkten Ableitungen zu schätzen und Gleichungen durch geschicktes Iterieren zu lösen.

10.1 Lineare Näherung

Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer Stelle x_0 kennen Sie als die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f in diesem Punkt. Wenn wir uns die Kurve unter einem Mikroskop stark vergrößert vorstellen, verschwindet die Krümmung zunehmend. In der unmittelbaren Umgebung von x_0 sieht die Funktion fast aus wie eine Gerade. Diese Gerade ist die Tangente.

Daraus ergibt sich eine mächtige Idee: Wenn die Funktion in einem kleinen Bereich fast gerade ist, können wir die oft komplizierte Funktion $f(x)$ durch die simple lineare Funktion der Tangente ersetzen. Betrachten wir einen Punkt x, der ein kleines Stück h von unserem Startpunkt x_0 entfernt ist, also $x = x_0 + h$. Statt den exakten Wert $f(x_0 + h)$ auf der krummen Kurve zu berechnen, laufen wir auf der Tangente. Wir starten bei der Höhe $f(x_0)$ und legen die horizontale Distanz h mit der konstanten Steigung $f'(x_0)$ zurück. Der Höhenzuwachs ist also Steigung mal Weg.

Damit erhalten wir die Formel der linearen Näherung:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0).$$

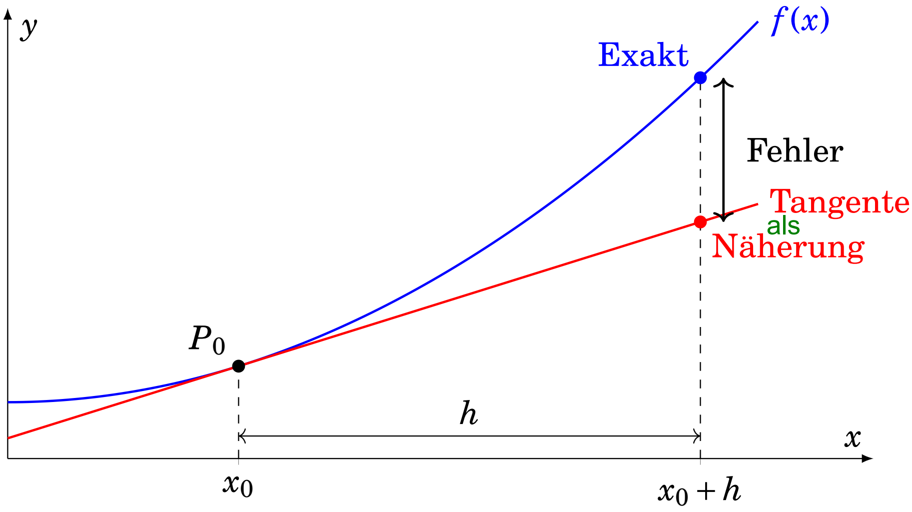
Lassen Sie uns das an einem ganz klassischen Beispiel durchspielen, das man im Kopf rechnen kann. Wir wollen den Wert von $\sqrt{103}$ abschätzen. Wir kennen die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$, aber 103 ist keine Quadratzahl. Jedoch liegt 100 sehr nahe an 103, und von 100 kennen wir die Wurzel exakt.

Wir setzen also unseren Stützpunkt $x_0 = 100$. Der Abstand zu unserem Ziel ist $h = 3$. Der Funktionswert an der Stützstelle ist $f(100) = \sqrt{100} = 10$. Nun brauchen wir die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. An unserer Stützstelle beträgt die Steigung $f'(100) = \frac{1}{2\cdot 10} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Die lineare Näherung liefert uns sofort:

$$\sqrt{103} \approx 10 + 3 \cdot 0{,}05 = 10{,}15.$$

Wenn Sie das in den Taschenrechner eintippen, erhalten Sie ungefähr 10,14889. Unsere im Kopf berechnete Näherung ist also erstaunlich präzise.



Nun stellt sich die kritische Frage: Wie groß ist der Fehler, den wir dabei machen? Die Grafik oben zeigt deutlich, dass die Lücke zwischen der roten Tangente und der blauen Kurve immer größer wird, je weiter wir uns vom Berührpunkt x_0 entfernen. Diese Lücke entsteht durch die Krümmung der Kurve. Eine Gerade hat keine Krümmung. Die Krümmung einer Funktion wird durch ihre zweite Ableitung $f''(x)$ beschrieben.

Wir können den Fehler also abschätzen, wenn wir Informationen über die zweite Ableitung haben. Nehmen wir an, wir betrachten das Intervall zwischen x_0 und $x_0 + H$. Stellen Sie sich vor, der Betrag der zweiten Ableitung $|f''(x)|$ ist in diesem gesamten Bereich nirgends größer als eine Konstante M. Physikalisch gesprochen: Wenn $f(t)$ der Ort ist, dann ist $f'(t)$ die Geschwindigkeit und $f''(t)$ die Beschleunigung. Unsere Näherung geht davon aus, dass die Geschwindigkeit konstant bleibt ($f'(x_0)$). Der Fehler entsteht, weil sich die Geschwindigkeit in Wahrheit ändert – also weil eine Beschleunigung wirkt.

Wenn die Beschleunigung maximal M beträgt, dann kann die Geschwindigkeit nach der Zeit h maximal um $M \cdot h$ vom Startwert abweichen. Das bedeutet für die erste Ableitung:

$$|f'(x_0 + h) - f'(x_0)| \leq M \cdot h.$$

Wenn die Geschwindigkeit aber maximal um diesen Wert abweicht, wie groß ist dann der Fehler beim zurückgelegten Weg? Aus der Physik wissen wir: Bei konstanter Beschleunigung a ist der zusätzlich zurückgelegte Weg $\frac{1}{2}at^2$. Übertragen auf unsere Funktion bedeutet das: Der Fehler in der Funktionshöhe wächst maximal wie eine Parabel mit der Krümmung M.

Der Betrag des Fehlers der linearen Näherung ist also quadratisch beschränkt:

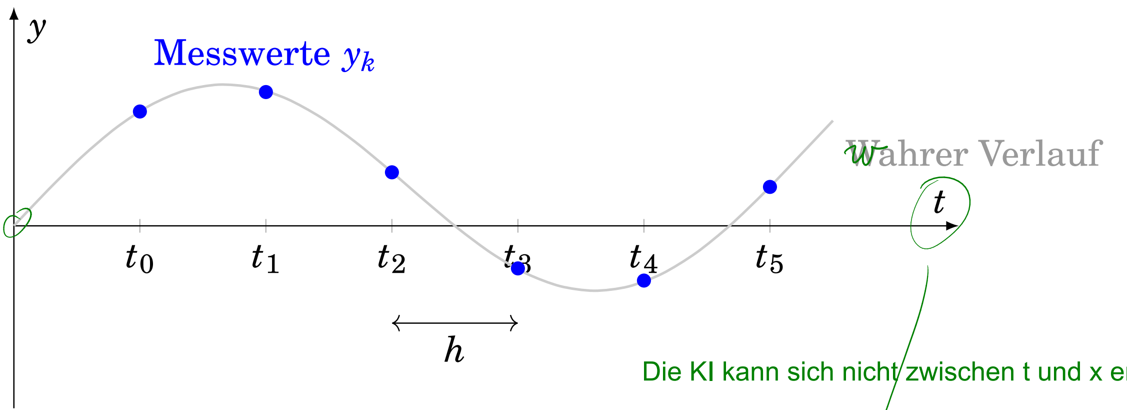
$$|f(x_0 + h) - (f(x_0) + h \cdot f'(x_0))| \leq \frac{M}{2} h^2.$$

Diese Abschätzung gilt, solange wir uns in dem Bereich bewegen, in dem $|f''(x)| \le M$ ist. Hierbei kann h auch negativ sein; das Quadrat h^2 sorgt dafür, dass die Abschätzung positiv bleibt. Das ist ein sehr beruhigendes Ergebnis: Wenn h sehr klein ist (sagen wir 0,1), dann ist h^2 bereits sehr viel kleiner (0,01). Der Fehler der linearen Näherung schwindet also quadratisch mit dem Abstand, er wird sehr schnell sehr klein, wenn wir nahe bei x_0 bleiben.

Wenden wir das auf unser Wurzel-Beispiel an. Die erste Ableitung war $\overset{\frac{1}{2}}{\cancel{0{,}5}}\,x^{-1/2}$. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = -\overset{\frac{1}{4}}{\cancel{0{,}25}}\,x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Wir betrachten das Intervall von 100 bis 103. In diesem Bereich ist der Betrag der zweiten Ableitung am größten, wenn x am kleinsten ist (also bei 100), da x im Nenner steht. Unser M ist also $|f''(100)| = \frac{1}{4 \cdot 1000} = 0{,}00025$. Der maximale Fehler unserer Schätzung ist damit höchstens $\frac{0{,}00025}{2} \cdot 3^2 = 0{,}000125 \cdot 9 = 0{,}001125$. Tatsächlich war unser wahrer Fehler etwa 0,00111, was wunderbar ?? unterhalb dieser Schranke liegt. Wir wissen also, dass die Näherung auf der ~~dritten~~ zweiten Nachkommastelle sicher korrekt ist, ohne den wahren Wert zu kennen.

10.2 Numerisches Ableiten

In der Elektrotechnik haben wir oft gar keine glatten Funktionskurven wie im Mathebuch. Ein Mikrocontroller liest Sensordaten zu festen Zeitpunkten ein. Wir sprechen von *zeitdiskreten* Signalen oder Abtastwerten. Das Resultat ist keine Linie, sondern eine Folge von Punkten:



Die KI kann sich nicht zwischen t und x entscheiden.

Wie berechnet man von so etwas die Ableitung (die Geschwindigkeit der Änderung)? Wir dürfen hier auf keinen Fall versuchen, den Grenzwert $h \to 0$ nachzubilden, da unser h (die Abtastzeit) fest durch die Hardware vorgegeben ist. Ein häufiger Fehler ist die Verwendung des sogenannten Vorwärts-Differenzenquotienten, also der simplen Steigung zwischen zwei Nachbarn: $(y_{k+1} - y_k)/h$. Diese Formel, die direkt aus der Grenzwertdefinition der Ableitung stammt, ist numerisch ungenau, da sie die Steigung nicht im Messpunkt t_k, sondern versetzt zwischen den Punkten schätzt.

Besser ist es, symmetrisch zu denken. Wir legen eine Parabel durch drei aufeinanderfolgende Punkte: den Vorgänger y_{-1}, den aktuellen Punkt y_0 und den Nachfolger y_1 (die Indizes sind hier relativ zum betrachteten Zeitpunkt x). Die Steigung dieser Parabel genau in der Mitte bei x entspricht geometrisch der Steigung der Sekante, die den linken und den rechten Punkt verbindet. Der mittlere Punkt y_0 beeinflusst diese Steigung gar nicht!

Daraus resultiert der **zentrale Differenzenquotient** für die erste Ableitung:

$$f'(x) \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}.$$

Auch für die zweite Ableitung (die Krümmung) liefert das Parabel-Modell eine Schätzformel. Die Krümmung misst, wie stark der mittlere Wert y_0 von der geraden Linie zwischen y_{-1} und y_1 abweicht. Die Formel lautet:

$$f''(x) \approx \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}.$$

Hinweis: Die exakte algebraische Herleitung dieser beiden Formeln mittels der Parabelgleichung führen wir ausführlich im Seminar durch. Wichtig ist hier das Verständnis: Wir nutzen lokale geometrische Modelle (hier Parabeln), um Informationen über Steigung und Krümmung aus diskreten Daten zu extrahieren.

10.3 Newton-Verfahren

Oft müssen wir in der Praxis Gleichungen lösen, die ~~nach denen~~ man nicht einfach auflösen kann, zum Beispiel $x^2 = \sin(x) + 5$ oder $e^x + x = 0$. Wir formulieren das Problem immer so um, dass auf einer Seite eine Null steht: $f(x) = 0$. Wir suchen also eine Nullstelle.

Die Idee des Newton-Verfahrens ist eine geometrische Iteration. Wir starten mit einem Schätzwert x_0. Anstatt die Nullstelle der komplizierten Kurve zu suchen, legen wir eine Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Wir bestimmen den Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt ist unser neuer, hoffentlich besserer Schätzwert x_1.

Tangentengerade!

Warum genau dieser Wert? Die Gleichung der Tangente $t(x)$ im Punkt x_n lautet (Punkt-Steigungs-Form):

$$t(x) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

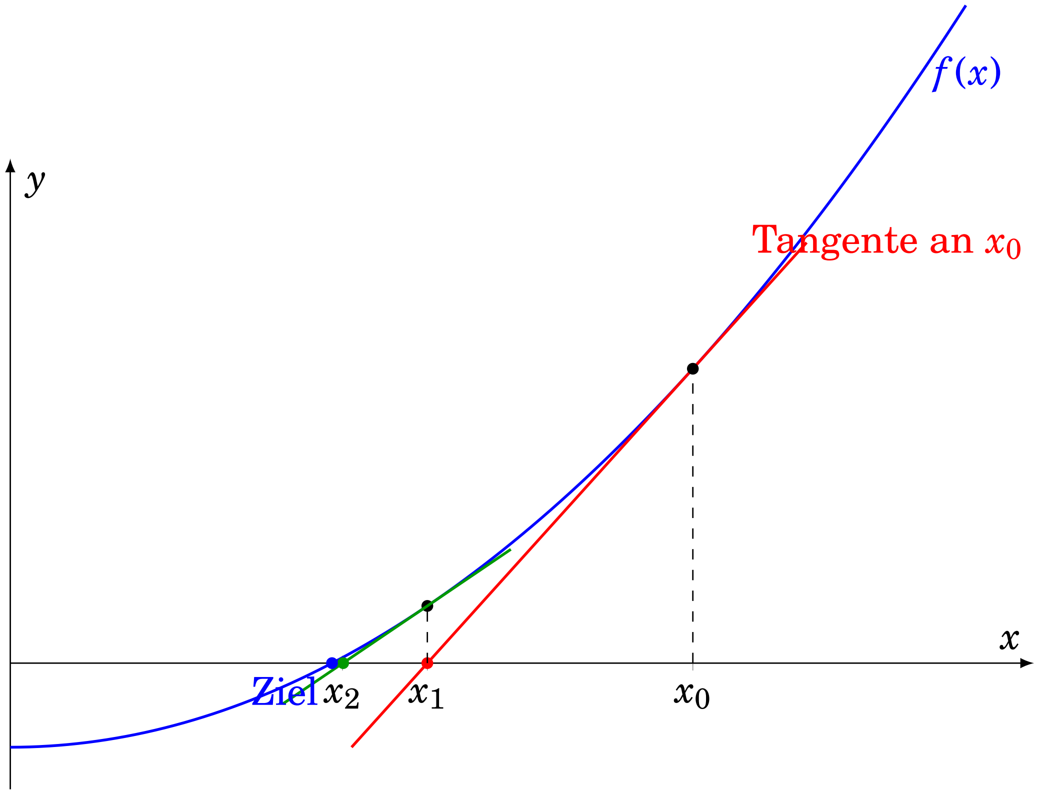
Wir suchen nun die Nullstelle der Tangente, setzen also $t(x) = 0$. Unser neuer Wert x_{n+1} ist die Lösung dieser linearen Gleichung:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n).$$

Wenn wir das nach x_{n+1} umstellen, erhalten wir die berühmte Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Schauen wir uns das graphisch an:



Im Diagramm sehen wir, wie wir von x_0 über die rote Tangente zu x_1 kommen. Von dort gehen wir wieder vertikal zur Kurve und nutzen die nächste (grüne) Tangente, um x_2 zu finden. Man erkennt, dass x_2 schon extrem nahe an der wahren Nullstelle (blau) liegt.

Wenn wir nahe genug an der Lösung starten, zeigt das Newton-Verfahren eine beeindruckende Eigenschaft: Die Anzahl der korrekten Dezimalstellen verdoppelt sich in jedem Schritt etwa! Man nennt dies *quadratische Konvergenz*.

Warum ist das so? Das lässt sich tatsächlich anschaulich begründen. Betrachten wir die Iteration als eine Funktion $g(x)$, die aus dem alten Wert x den neuen Wert macht:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

"Fixpunkt": Punkt, der feststehend (also fix wie in "fixiert") bleibt

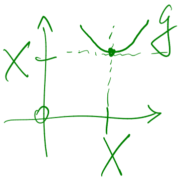
Sei X die wahre Lösung, also $f(X) = 0$. Wenn wir X in die Formel einsetzen, ändert sich nichts mehr ($g(X) = X$), wir haben den Fixpunkt erreicht. Wie aber verhält sich der Fehler in der Nähe von X? Dazu schauen wir uns die Ableitung $g'(x)$ an. Mit der Quotientenregel gilt:

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Das wirkt kompliziert, wird aber an der Stelle der Lösung X ganz einfach. Da $f(X) = 0$ ist, fällt der hintere Teil im Zähler weg:

$$g'(X) = 1 - \frac{(f'(X))^2}{(f'(X))^2} = 1 - 1 = 0.$$

Das ist die entscheidende Erkenntnis! Die Fehler-Funktion $g(x)$ hat am Zielpunkt X eine waagerechte Tangente, also die Steigung 0. Geometrisch bedeutet das: Der Graph von



$g(x)$ schmiegt sich bei X wie eine ~~flache~~ Parabel am Scheitelpunkt an den Wert X an. Wenn wir nun einen kleinen Fehler betrachten (Abstand von x zu X), dann wird dieser Fehler im nächsten Schritt durch die Parabelform quadriert.

$$\text{Neuer Fehler} \approx C \cdot (\text{Alter Fehler})^2.$$

Quadriert man eine sehr kleine Zahl (z.B. 0,01, also 10^{-2}), wird sie winzig (0,0001, also 10^{-4}). Aus zwei Nullen hinter dem Komma werden vier, im nächsten Schritt acht. Das Verfahren „rast“ förmlich in die Lösung hinein.

Achtung: Das Newton-Verfahren kann aber in die Irre oder im Kreis laufen. Ganz offensichtlich hat es Probleme, wenn die Ableitung an der aktuellen Schätzstelle null oder fast null ist.