IMA 1: Analysis. Skript Woche 11

Version: 2025-12-10

Skript generiert von Gemini 3 Pro Preview, gepromptet und in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

11 Extrema, Krümmung, Wendepunkte

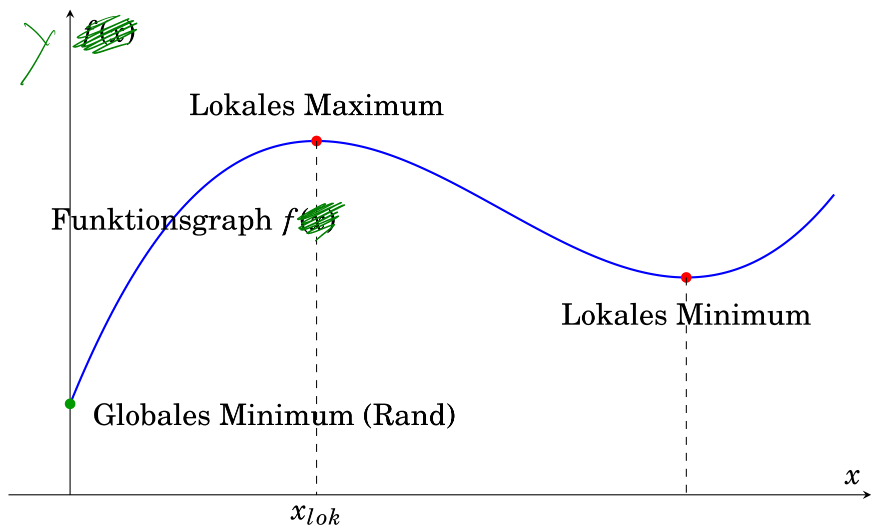
In der ingenieurwissenschaftlichen Praxis, speziell in der Elektro- und Energietechnik, ist die Analyse von Funktionsverläufen weit mehr als eine abstrakte Fingerübung. Wir suchen oft nach optimalen Betriebspunkten oder kritischen Grenzen. Denken Sie an die Kennlinie einer Diode oder an den Leistungsverlauf an einem Verbraucher in Abhängigkeit vom Widerstand. Bei der Leistungsanpassung wollen wir jenen Widerstandswert finden, bei dem die übertragene Leistung ein Maximum erreicht. In der Regelungstechnik analysieren wir das Einschwingverhalten von Systemen und interessieren uns für das maximale Überschwingen, um Schäden an Bauteilen zu verhindern. All diese Fragestellungen führen uns auf den mathematischen Begriff des Extremums. In diesem Kapitel werden wir die Werkzeuge der Differentialrechnung nutzen, um solche Punkte präzise zu bestimmen und das Verhalten der Funktionen – ihre Krümmung und ihre Wendepunkte – exakt zu beschreiben. Dabei legen wir Wert auf die korrekte Verwendung der Begriffe: Wir suchen ein *Extremum* oder mehrere *Extrema*.

11.1 Extrema

Wenn wir im Alltag von einem „Maximum“ sprechen, meinen wir oft den absolut höchsten Punkt. In der Mathematik müssen wir hier differenzierter vorgehen. Wir unterscheiden zwischen globalen und lokalen Extrema. Ein *globales Maximum* ist tatsächlich der höchste Funktionswert, den die Funktion im gesamten Definitionsbereich annimmt. Das ist der Wert, auf den wir beispielsweise die Spannungsfestigkeit eines Kondensators auslegen müssen, damit er unter keinen Umständen durchschlägt. Analog ist das *globales Minimum* der absolut tiefste Wert. Gegebenenfalls gibt es keinen global größten bzw. kleinsten Wert!
Beispiel: f(x) = 1/x mit D = R⁺ hat keinen größten und keinen kleinsten Wert.

Viel häufiger haben wir es jedoch mit *lokalen Extrema* zu tun. Ein lokales Maximum liegt an einer Stelle x_0 vor, wenn der Funktionswert $f(x_0)$ der größte Wert in einer unmittelbaren Umgebung um x_0 ist. Man kann sich das wie den Gipfel eines einzelnen Berges in einem Gebirge vorstellen. Auch wenn es im Nachbargebirge einen noch höheren Berg gibt, so ist dieser lokale Gipfel doch der höchste Punkt weit und breit. Wir müssen dabei sauber zwischen den Begriffen trennen: Die *Extremstelle* ist der x-Wert (z.B. die Zeit oder der Widerstand), der *Extremwert* ist der zugehörige Funktionswert $f(x)$ (z.B. die Leistung), und der *Extrempunkt* ist das Paar $(x|f(x))$ im Koordinatensystem.

Die folgende Abbildung verdeutlicht diese Begriffe. Beachten Sie hierbei besonders den linken Randbereich: Das ~~absolute~~ globale Minimum der gezeigten Funktion liegt direkt am Startpunkt des Intervalls.

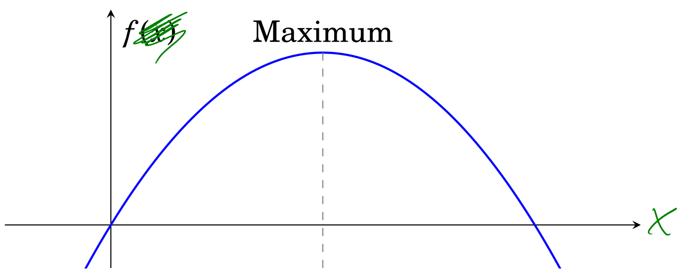


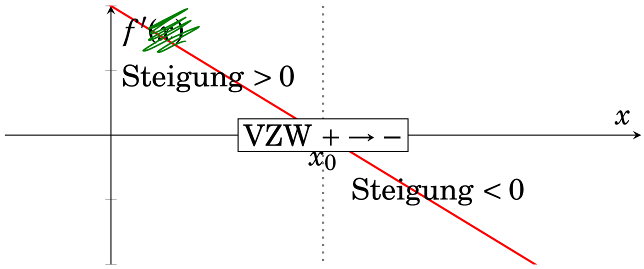
Es ist wichtig zu verstehen, dass Gleichheit in einer Umgebung erlaubt ist. Ein flaches Plateau wäre mathematisch gesehen eine Menge von Punkten, die alle gleichzeitig lokale Maxima und Minima sind. Ein oft missverstandener Punkt betrifft die Existenz von Extrema. Unsere Anschauung sagt uns, dass jede Kurve irgendwo einen höchsten und tiefsten Punkt hat. Das gilt aber nur für stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ (Satz von Weierstraß). Wenn der Definitionsbereich offen ist (z.B. $0 < x < 1$) oder ins Unendliche reicht, muss es keine globalen Extrema geben. Die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $(0, \cancel{1})$ hat beispielsweise kein Maximum, da sie gegen Unendlich strebt, und kein Minimum, da sie der Null beliebig nahe kommt, sie aber nie erreicht.

Wie finden wir diese Punkte rechnerisch? Bei differenzierbaren Funktionen ist die Steigung der Tangente der Schlüssel. An einem Berggipfel oder in einer Talsohle ist die Steigung momentan Null. Das liefert uns ~~das~~ ein *notwendiges Kriterium*: Damit an der Stelle x_0 ein lokales Extremum vorliegen kann, muss $f'(x_0) = 0$ gelten. Wir nennen solche Stellen „stationäre Punkte". Doch Vorsicht: Nicht jeder Punkt mit waagerechter Tangente ist ein Extremum. Denken Sie an die Funktion $f(x) = x^3$ bei $x = 0$. Die Steigung ist dort ~~N~~ null, aber es ist ein Sattelpunkt, kein Extremum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist also notwendig, aber nicht allein ausreichend.

Um sicherzugehen, benötigen wir ein *hinreichendes Kriterium*. ~~Dieses setzt sich aus zwei Bedingungen zusammen, die *gleichzeitig* erfüllt sein müssen~~. Liegt an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente vor ($f'(x_0) = 0$) **und** ist die Krümmung dort ungleich Null ($f''(x_0) \neq 0$), dann haben wir sicher ein Extremum. Ist die zweite Ableitung negativ ($f''(x_0) < 0$), beschreibt die Kurve eine Rechtskurve (Bergkuppe), wir haben ein lokales Maximum. Ist sie positiv ($f''(x_0) > 0$), haben wir eine Linkskurve (Tal), also ein lokales Minimum.

Es gibt jedoch Fälle, in denen auch die zweite Ableitung ~~N~~ null ist (z.B. bei $f(x) = x^4$ im Minimum). Hier versagt das f''-Kriterium nicht im Sinne von „falsch", sondern es macht keine Aussage. Ein robusteres und oft anschaulicheres Werkzeug ist das *Vorzeichenwechselkriterium* der ersten Ableitung. Wir schauen uns an, wie sich die Steigung $f'(x)$ in der Umgebung von x_0 verhält. Wechselt $f'(x)$ von Plus (Anstieg) nach Minus (Abstieg), müssen wir über einen Gipfel gegangen sein – ein Maximum. Wechselt sie von Minus nach Plus, durchquerten wir ein Tal – ein Minimum. Findet kein Vorzeichenwechsel statt (Plus bleibt Plus oder Minus bleibt Minus), war es nur ein Sattelpunkt.

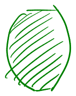




Das Diagramm oben zeigt den direkten Zusammenhang: Wo $f(x)$ den Bergipfel bei x_0 hat, durchstößt f'~~(x)~~ die x-Achse exakt an dieser Stelle von oben nach unten. Dies illustriert, warum der Vorzeichenwechsel ein so mächtiges Kriterium ist.

11.2 Krümmung

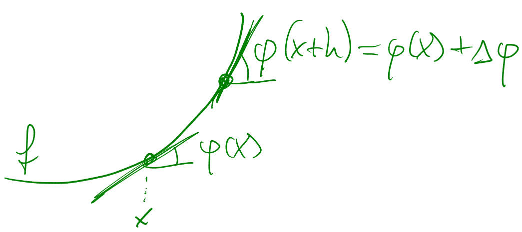
Bisher haben wir nur betrachtet, ob es bergauf oder bergab geht. Für das Fahrverhalten eines Fahrzeugs oder die Belastung eines Materials ist aber oft die *Krümmung* entscheidend. Mathematisch wird diese durch die zweite Ableitung f''~~(x)~~ beschrieben.



Um die Begriffe *konvex* (linksgekrümmt) und *konkav* (rechtsgekrümmt) mathematisch sauber zu definieren, betrachten wir die Ebene, in der unser Funktionsgraph liegt. Wir schauen uns die Menge aller Punkte an, die *oberhalb* des Graphen liegen. ~~Diese Menge nennt man den Epigraphen~~. Ist diese Menge eine *konvexe Menge* (das heißt, jede Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte dieser Menge liegt vollständig innerhalb der Menge), so nennen wir die Funktion konvex. Dies ist der Fall, wenn $f''(x) > 0$ gilt (Linkskurve). Ist hingegen die Menge *unterhalb* des Graphen ~~(der Hypograph)~~ eine konvexe Menge, so nennen wir die Funktion konkav. Dies entspricht $f''(x) < 0$ (Rechtskurve).

Doch „links" oder „rechts" ist nur qualitativ. Ingenieur~~e~~*innen benötigen Zahlenwerte. Wie „stark" ist die Krümmung? Ein Maß dafür ist der *Krümmungsradius* R. Anschaulich ist dies der Radius jenes Kreises (des Schmiegekreises), der sich an einer bestimmten Stelle am besten an die Kurve schmiegt. Eine sehr enge Kurve hat einen kleinen Radius (hohe Krümmung), eine kaum gebogene Kurve einen riesigen Radius (geringe Krümmung). Eine Gerade hat den Radius ~~U~~unendlich.

Um den Krümmungsradius R zu bestimmen, betrachten wir zwei benachbarte Punkte auf der Kurve: x und $x+h$. Wir nutzen lineare Näherungen ~~(Taylor-Entwicklung 1. Ordnung)~~. Die Steigung der Tangente ist $f'(x)$. Der Winkel ϕ, den die Tangente zur Horizontalen einnimmt, berechnet sich über $\phi(x) = \arctan(f'(x))$. Bewegen wir uns um das kleine Stück



h weiter nach rechts, ändert sich die Steigung auf $f'(x+h)$. Mithilfe der linearen Näherung gilt:

$$f'(x+h) \approx f'(x) + h \cdot f''(x)$$

Daraus ergibt sich der neue Winkel $\phi(x+h) = \arctan(f'(x+h))$. Die Änderung des Winkels $\Delta\phi$ ist also:

$$\Delta\phi \approx \arctan(f'(x) + h \cdot f''(x)) - \arctan(f'(x))$$

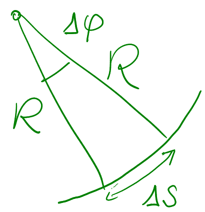
Für kleine Änderungen nutzen wir die lineare Näherung der Arkustangens-Funktion. Da die Ableitung von $\arctan(u)$ gleich $\frac{1}{1+u^2}$ ist, können wir den Zuwachs linearisieren:

$$\Delta\phi \approx h \cdot f''(x) \cdot \frac{1}{1+(f'(x))^2}$$

Gleichzeitig legen wir auf dem Bogen der Kurve eine Strecke Δs zurück. Für kleine h nähern wir den Bogen durch die Hypotenuse des Steigungsdreiecks an:

$$\Delta s \approx \sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2} \approx \sqrt{h^2 + (h \cdot f'(x))^2} = h \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Der Krümmungsradius R ist definiert durch das Verhältnis von Bogenlänge zur Winkeländerung (wie beim Kreisumfang $s = R \cdot \phi$):



$$R = \left| \frac{\Delta s}{\Delta\phi} \right|$$

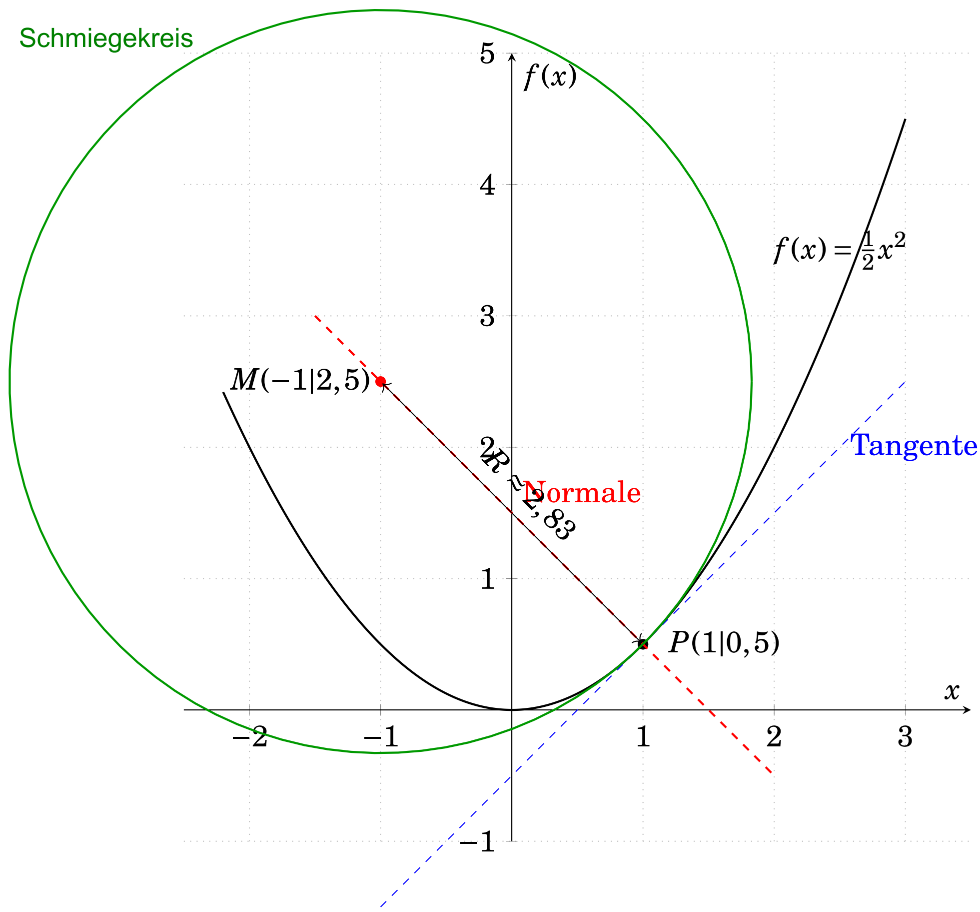
Setzen wir unsere Näherungen ein:

$$R \approx \left| \frac{h \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{h \cdot f''(x) \cdot \frac{1}{1+(f'(x))^2}} \right| = \left| \frac{(1 + (f'(x))^2) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}}{f''(x)} \right|$$

Kürzen wir h weg und fassen zusammen, erhalten wir die bekannte Formel:

$$R = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}{|f''(x)|}$$

Die folgende Grafik zeigt den Schmiegekreis an einer Parabel $f(x) = 0,5x^2$ an der Stelle $x = 1$. Wir haben hier eine Steigung von 1 (45°) und eine zweite Ableitung von 1. Rechnen wir nach: $R = \frac{(1+1)^{1,5}}{1} = 2^{1,5} \approx 2,83$. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Normalen. Da wir im Diagramm ein orthonormales System verwenden (gleicher Maßstab für x und y), berührt der Kreis die Kurve exakt.



In der Abbildung sehen wir, wie der grüne Schmiegekreis die Parabel im Punkt P „küsst" ~~(oskulieren)~~. Er ~~schneidet die Funktion dort nicht, sondern~~ teilt exakt Tangentensteigung und Krümmung.

11.3 Wendepunkte

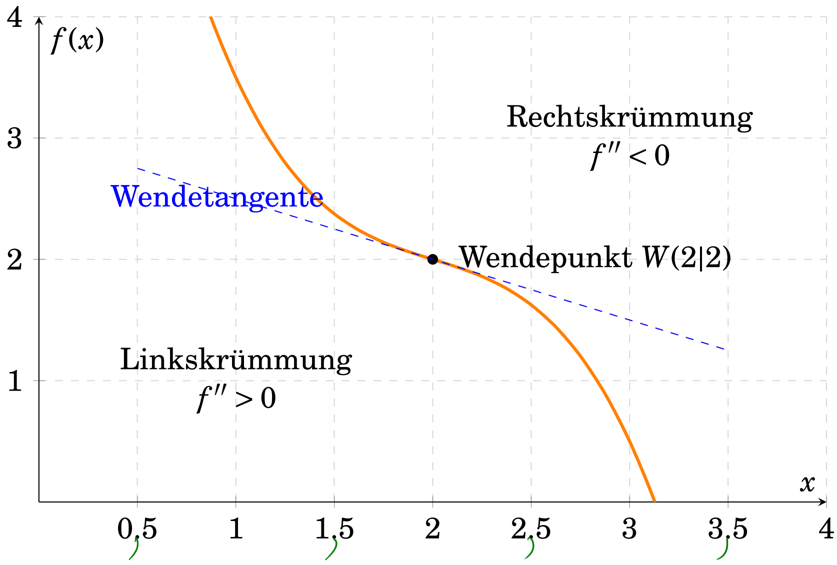
Kombinieren wir nun unser Wissen über Steigung und Krümmung, gelangen wir zu den *Wendepunkten*. Ein Wendepunkt ist jene Stelle, an der sich das Krümmungsverhalten der Funktion ändert. Stellen Sie sich vor, Sie fahren auf einer Serpentinenstraße. Sie befinden sich in einer langgezogenen Linkskurve. Um in die folgende Rechtskurve überzugehen, müssen Sie das Lenkrad zurückdrehen. Es gibt einen Moment, in dem die Räder exakt geradeaus stehen. In diesem Moment ist die Krümmung Null. Dann beginnt das Einschlagen in die Gegenrichtung.

Da die zweite Ableitung $f''\cancel{(x)}$ die Krümmung repräsentiert, folgt daraus sofort das *notwendige Kriterium* für einen Wendepunkt: Die zweite Ableitung muss Null sein, also $f''(x_w) = 0$. Aber auch hier gilt: Nicht jede Nullstelle von f'' ist ein Wendepunkt. Damit wirklich ein Wechsel von Links- nach Rechtskurve (oder umgekehrt) stattfindet, muss $f''(x)$ das Vorzeichen wechseln. Das ist ein ~~das~~ *hinreichendes Kriterium*. Alternativ können wir die dritte Ableitung prüfen: Ist $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$, so liegt sicher ein Wendepunkt vor.

Anschaulich hat der Wendepunkt noch eine weitere, extrem wichtige Bedeutung: Da $f''(x)$ die Ableitung (Steigung) von $f'(x)$ ist, bedeutet $f''(x) = 0$, dass die Steigung $f'(x)$ selbst ein Extremum hat. **Im Wendepunkt ist die Steigung der Funktion am größten oder**

am kleinsten. Das ist der Punkt des steilsten Anstiegs oder des steilsten Gefälles in der Umgebung.

In der folgenden Abbildung betrachten wir einen Wendepunkt bei $x = 2$.



Im Diagramm sehen wir den Übergang: Links vom Wendepunkt W ist die Kurve „nach oben offen“ (konvex), rechts davon „nach unten offen“ (konkav). Die blaue Wendetangente durchschneidet den Graphen an dieser Stelle. ~~Dies ist das einzige Mal, dass eine Tangente die Kurve schneidet statt sie nur zu berühren.~~

Zusammenfassend: Die erste Ableitung liefert uns die Kandidaten für Extrema (Steigung Null). Die zweite Ableitung entscheidet über Max/Min (Krümmung) und liefert Kandidaten für Wendepunkte (Krümmung Null).