

# IMA 1: Analysis. Skript Woche 12

Version: 2025-12-21



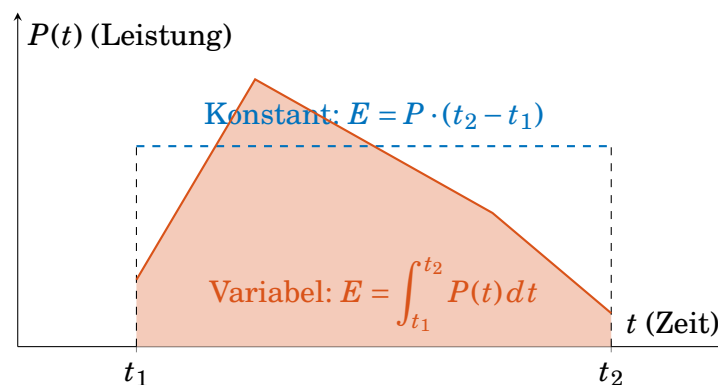
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

*Skript generiert von Gemini 3 Pro Preview, gepromptet und in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach*

## 12 Integral

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir uns intensiv mit der *Ableitung* beschäftigt. Wir haben gelernt, wie man Änderungsraten bestimmt: Wie schnell ändert sich die Spannung an einem Kondensator? Wie steil ist der Anstieg eines Signals? Nun wenden wir uns der zweiten großen Säule der Analysis zu: dem **Integral**.

In der Elektrotechnik begegnen uns Integrale auf Schritt und Tritt, oft ohne dass wir sie sofort als solche erkennen. Ein klassisches Beispiel ist die Energieberechnung. Wenn ~~ein~~ <sup>ein</sup> ~~ein~~ <sup>aufnimmt</sup> Verbraucher eine konstante Leistung  $P$  für eine Zeit  $t$  ~~erregt~~ <sup>umgesetzte</sup>, ist die ~~verbrauchte~~ <sup>mal</sup> ~~mal~~ <sup>hier</sup> Energie einfach das Produkt aus Leistung und Zeitdauer. Was aber, wenn die Leistung schwankt, wie es beim Einschaltvorgang eines Motors oder bei einem Musiksignal der Fall ist? Dann ist  $P(t)$  eine Funktion der Zeit. Die Gesamtenergie ist dann nicht mehr einfach ein Produkt, sondern die *Summe* aller momentanen Leistungen ~~mal~~ <sup>mal</sup> ~~hier~~ <sup>hier</sup> winzige Zeitintervalle. Geometrisch entspricht dies dem **Flächeninhalt unter der Kurve** des Graphen von  $P(t)$ .



In diesem Kapitel werden wir sehen, dass das Integral in gewisser Weise die *Umkehrung der Ableitung* ist. Wir werden Begriffe wie das **bestimmte Integral** (eine Zahl, z.B. die Energie in Joule) und das **unbestimmte Integral** (eine Funktionenfamilie von **Stammfunktionen**) kennenlernen.

**Vorsicht bei der Begriffsverwendung:** Der Begriff „Integral“ ist in der Mathematik und Technik etwas überladen.

1. Hier lernen wir das Integral als Fläche bzw. Rekonstruktion einer Größe aus ihrer Änderungsrate. <sup>kennen</sup>
2. Später, in der <sup>Regelungstechnik</sup> Systemtheorie, bezeichnet ein „Integrales Verhalten“ (I-Glied) ein Bauteil, das Eingangswerte aufsummiert.
3. In der Theorie der Differentialgleichungen nennt man eine Lösung manchmal ein „Integral der Gleichung“.
4. In der theoretischen Mechanik gibt es „Erste Integrale“ (Erhaltungsgrößen wie Energie oder Impuls).

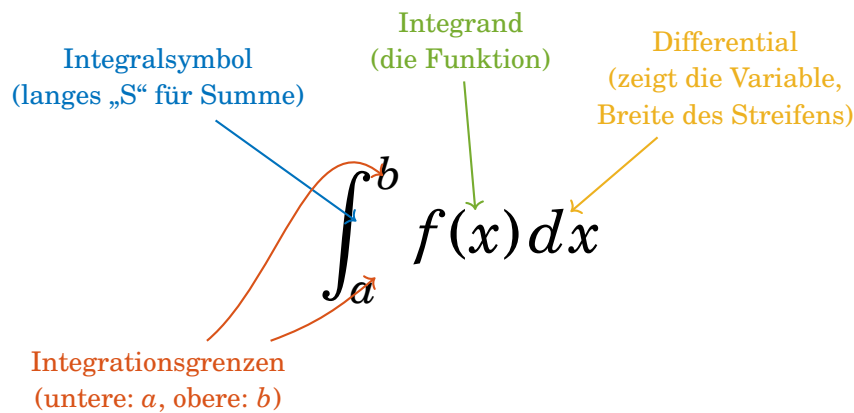
Lassen Sie sich nicht verwirren: Der Kontext verrät meist, was gemeint ist.

## 12.1 Idee des bestimmten Integrals

Das **bestimmte Integral** ordnet einer Funktion in einem Intervall  $[a, b]$  einen festen Zahlenwert zu. Die Notation ist historisch gewachsen und sehr suggestiv:

$$\int_a^b f(x) dx$$

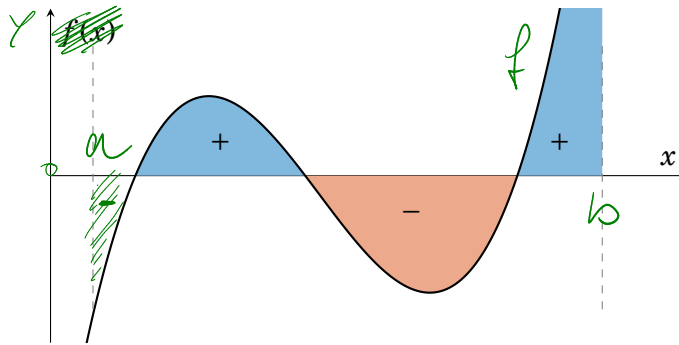
Schauen wir uns die Anatomie dieser Formel an:



Das Symbol  $\int$  ist ein stilisiertes „S“ von Leibniz und steht für *Summe*. Das  $dx$  erinnert an ein unendlich kleines  $\Delta x$ . Wir summieren also unendlich viele Rechtecke der Höhe  $f(x)$  und der Breite  $dx$ .

### Flächeninhalt mit Vorzeichen

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Integrals in der Ingenieurmathematik ist, dass es sich um einen **orientierten (vorzeichenbehafteten) Flächeninhalt** handelt. Flächen oberhalb der  $x$ -Achse zählen positiv, Flächen unterhalb zählen negativ.



**Warum dieses Vorzeichen?** Stellen Sie sich einen Wechselstrom  $i(t) = \sin(t)$  vor. Wenn Sie die Ladung  $Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt$  über eine volle Periode integrieren, ist netto keine Ladung geflossen (Elektronen hin, Elektronen zurück). Das Integral ist ~~Null~~. Würden wir den „geometrischen“ (positiven) Flächeninhalt nehmen, käme ein positiver Wert heraus, was physikalisch falsch wäre. Das Vorzeichen ist also kein Ärgernis, sondern ein Segen für die Modellierung der Realität.

### Linearität: Das Integral als Maschine

Wir haben die Ableitung bereits als eine lineare Abbildung kennengelernt: Eine Maschine, die eine Funktion  $f$  nimmt und eine Funktion  $f'$  ausspuckt. Das *bestimmte Integral* ist ebenfalls eine Maschine, aber sie macht aus einer Funktion eine **Zahl** (den Flächeninhalt).

Wegen der Beachtung des Vorzeichens ist diese Abbildung **linear**. Das bedeutet analog zur Matrix-Vektor-Multiplikation oder zur Ableitung:

- **Homogenität:**  $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$  (Konstante Faktoren können vor das Integral gezogen werden).
- **Additivität:**  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  (Das Integral der Summe ist die Summe der Integrale).

Dies gilt selbst dann, wenn  $c$  negativ ist. Geometrische Flächeninhalte ohne Vorzeichen wären nicht linear (denn  $|-f(x)| = |f(x)|$ , aber  $-\int f \neq \int f$ ).

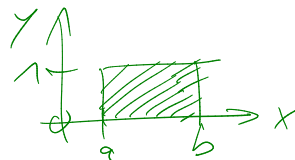
Kurzschreibweise ohne Grenzen, ohne  $x$  und ohne  $dx$

## 12.2 Definitionen des bestimmten Integrals

Bei der Ableitung waren sich alle einig: Differenzenquotient und Grenzwert, fertig. Beim Integral ist die Lage komplizierter. Es konkurrieren gut ein Dutzend Definitionen. Das deutet schon darauf hin: Integrieren ist „härter“ als Ableiten. Während man fast jede geschlossene Formel mechanisch ableiten kann, ist das Finden einer geschlossenen Formel für ein Integral oft unmöglich.

Wir fordern für jedes vernünftige Integral folgende Eigenschaften:

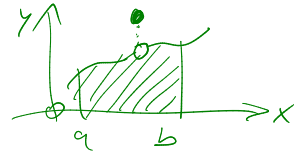
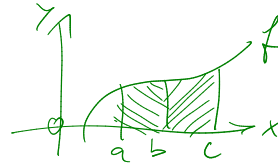
- **Normierung:** Das Integral der konstanten Funktion  $f(x) = 1$  über  $[a, b]$  ist die Länge des Intervalls, also  $b - a$ .



- **Linearität:** (siehe oben).

- **Intervalladditivität:**  $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ .

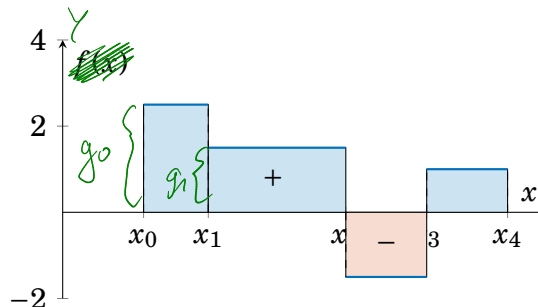
- **Unempfindlichkeit:** Ändert man eine Funktion an nur endlich vielen Stellen (z.B. nimmt man einen einzelnen Punkt aus einer Kurve heraus und setzt ihn woanders hin), darf sich der Flächeninhalt nicht ändern. Eine Linie hat schließlich keine Breite und damit keinen Flächeninhalt.



## Treppenfunktionen als Basis

Der einfachste Zugang erfolgt über **Treppenfunktionen** (Funktionen, die stückweise konstant sind). Hier ist klar, was das Integral ist: Die Summe der Rechtecksflächen  $g_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$ . Dies funktioniert auch für negative Funktionswerte (negative Höhe).

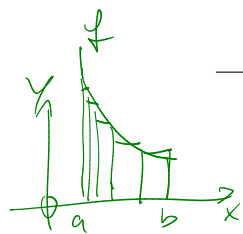
mit endlichen vielen Stücken



Das Problem ist: Wie kommt man von Treppen zu „krummen“ Kurven? Hier unterscheiden sich die Definitionen in ihrer Mächtigkeit (d.h., wie „kaputt“ oder „pathologisch“ eine Funktion sein darf, um noch integrierbar zu sein; auch beim Umgang mit Grenzwerten von Funktionen):

(bestehen Unterschiede; zu diesem Problem siehe die Seminaufgaben)

1. **Integral für Regelfunktionen:** Man betrachtet Funktionen, die sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen annähern lassen. Das ist mathematisch sehr elegant. Für die Ingenieurpraxis meist völlig ausreichend.
2. **Riemann-Integral (bzw. Darboux-Integral):** Der Klassiker. Man schachtelt die Funktion zwischen Treppenfunktionen ein, die immer feiner werden (Obersumme und Untersumme). Wenn sich Ober- und Untersumme demselben Wert annähern, ist die Funktion „Riemann-integrierbar“.
3. **Lebesgue-Integral:** Ausgesprochen fast wie das deutsche Wort „Gebäck“, aber mit L am Anfang. Dies ist der Standard in der fortgeschrittenen Signalverarbeitung und Quantenphysik. *Idee:* Beim Riemann-Integral unterteilt man die x-Achse in kleine Schritte (vertikale Streifen). Beim Lebesgue-Integral unterteilt man die y-Achse (Wertebereich). Man fragt: „Wie viel von der x-Achse hat einen Funktionswert von ungefähr y?“. Das macht dieses Integral extrem robust gegenüber Grenzwertbildungen.
4. **Henstock-Kurzweil-Integral:** Eine erst 1957 ~~entdeckte~~ <sup>erfundene</sup>, genial einfache Erweiterung des Riemann-Integrals, die sogar noch mächtiger als das Lebesgue-Integral ist.



*Idee:* Wie bei Riemann nutzt man Stützstellen, aber die Breite der Rechtecke darf je nach Ort variieren (abhängig von der „Rauheit“ der Funktion an der Stelle). Das erlaubt eine extrem flexible Anpassung (die sogenannte Gauge-Funktion).

*Beruhigung:* Für alle stetigen oder stückweise stetigen Funktionen, die Ihnen im Studium begegnen (Sinus, e-Funktion, Rechteckspannung), ~~liefern alle~~ diese Definitionen ~~exakt~~ denselben Wert. funktionieren und liefern

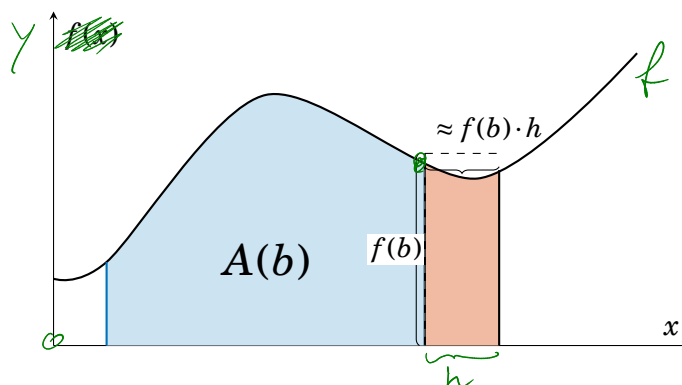
## 12.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dies ist der Höhepunkt des Kapitels. Hier verbinden wir die Welt der Steigungen (Ableitung) mit der Welt der Flächen (Integral).

Betrachten wir eine „Flächenfunktion“  $A(b)$ , die den Flächeninhalt unter einer Funktion  $f(x)$  von einem festen Startpunkt  $a$  bis zur variablen Grenze  $b$  angibt:

$$A(b) = \int_a^b f(x) dx$$

Was passiert, wenn wir  $b$  ein kleines Stückchen um  $h$  vergrößern?



Die neu hinzugekommene Fläche (rot) ist ungefähr ein Rechteck der Breite  $h$  und der Höhe  $f(b)$ .

(ggf. negativ!)</span>

$$A(b+h) - A(b) \approx h \cdot f(b)$$

Teilen wir durch  $h$ :

$$\frac{A(b+h) - A(b)}{h} \approx f(b)$$

Wenn wir nun den Grenzwert  $h \rightarrow 0$  bilden, wird aus der Näherung Gleichheit. Die linke Seite ist aber nichts anderes als die Definition der Ableitung von  $A$  an der Stelle  $b$ :

$$A'(b) = f(b)$$

**Das bedeutet:** Die Ableitung der Flächenfunktion ist die ursprüngliche Funktion (der Integrand)! Wenn wir also eine Funktion suchen, deren Ableitung  $f$  ist, dann haben wir das Integral gefunden.

Eine solche Funktion  $F$ , für die gilt  $F' = f$ , nennen wir **Stammfunktion** (englisch: *antiderivative*, also Anti-Ableitung). Da sich zwei Stammfunktionen nur durch eine Konstante

unterscheiden können (die beim Ableiten wegfällt), und das Integral bei  $b = a$  Null sein muss ( $A(a) = 0$ ), erhalten wir den **Hauptsatz**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Kurzschreibweise:  $[F(x)]_a^b$  oder  $F(x)|_a^b$ .

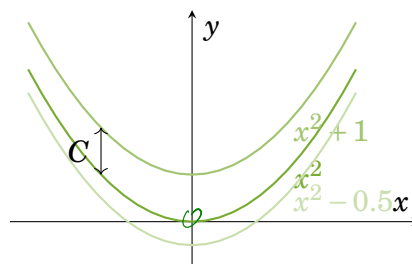
## Das unbestimmte Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion  $f$  nennt man das **unbestimmte Integral**. Man schreibt es ohne Grenzen:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

wobei  $C \in \mathbb{R}$  die <sup>zunächst frei wählbare</sup> Integrationskonstante ist.

**Beispiel:** Das unbestimmte Integral von  $f(x) = 2x$  ist die Familie der Funktionen  $x^2 + C$ . Ob  $x^2$ ,  $x^2 + 5$  oder  $x^2 - 100$  – die Steigung (Ableitung) ist überall  $2x$ .



**Wichtig:** Das unbestimmte Integral kehrt die Ableitung um, aber *nicht perfekt*. Die Information über den absoluten ~~Startwert~~ <sup>y-Versatz</sup> (die Konstante  $C$ ) ~~geht~~ <sup>geht</sup> beim Ableiten verloren und kann vom Integral nicht „magisch“ wiederhergestellt werden. Das ist vergleichbar mit dem Tangens und Arkustangens:  $\tan(\alpha)$  verliert die Information, wie oft man sich um  $\pi$  gedreht hat;  $\arctan(x)$  liefert immer nur einen Wert im Hauptzweig. Merken Sie sich den fundamentalen Unterschied: <sup>den</sup>

- **Bestimmtes Integral**  $\int_a^b \dots$ : Ein konkreter **Zahlenwert**. Keine Variable  $x$  mehr, kein  $C$ .
- **Unbestimmtes Integral**  $\int \dots$ : Eine <sup>(Stamm-)</sup> Menge von **Funktionen**. Hängt von  $x$  ab, enthält  $C$ .

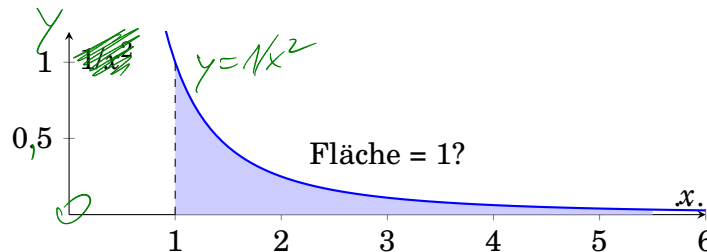
## 12.4 Uneigentliche Integrale

Manchmal reichen die Grenzen des Integrals bis ins Unendliche (z.B. Energie eines Signals über alle Ewigkeit) oder die Funktion selbst wird unendlich hoch (Polstellen). Solche Integrale nennt man **uneigentlich**.

## Typ 1: Unendliches Intervall

Wir betrachten  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ . Anschaulich fragen wir nach der Fläche eines unendlich langen „Hornes“. Die Strategie ist immer: **Nicht sofort unendlich einsetzen!** Stattdessen integrieren wir bis zu einer Variablen  $M$  und lassen dann  $M \rightarrow \infty$  laufen (Limes).

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M x^{-2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{M} - (-1) \right) = 0 + 1 = 1$$



Obwohl die Fläche unendlich lang ist, ist ihr Inhalt endlich!

## Typ 2: Unbeschränkter Integrand

Betrachten wir  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . Bei  $x = 0$  geht die Funktion gegen unendlich. Vorgehen: Wir starten bei  $\epsilon > 0$  und ~~lassen~~ <sup>nehmen</sup>  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

Auch hier: Unendlich hohe Fläche, aber endlicher Inhalt.

## 12.5 Numerische Integration

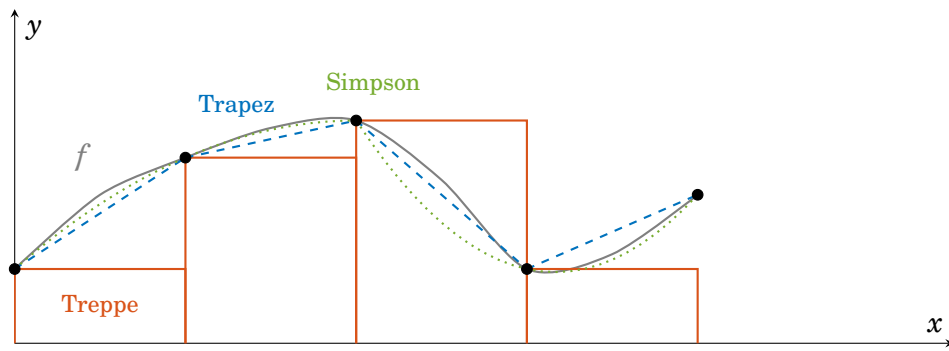
In der Elektrotechnik haben wir oft keine Funktionsformel  $f(x)$ , sondern Messwerte aus einem Oszilloskop oder Datenlogger:  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Wie berechnen wir das Integral (die Fläche)? Den Hauptsatz können wir nicht nutzen, da wir keine analytische Stammfunktion bilden können.

Wir müssen die Fläche nähern. Hierbei sollten wir *auf keinen Fall* Treppenstufen verwenden (Riemann-Summen), wie es die Definition suggeriert. Der Fehler ist dort viel zu groß. Es gibt wesentlich effizientere Methoden:

1. **Trapezregel:** Wir verbinden die Messpunkte nicht stufig, sondern *stückweise linear* (mit geraden Strichen von Punkt zu Punkt). Es entstehen Trapeze. Der Rechenaufwand ist kaum höher als bei Rechtecken, aber die Genauigkeit steigt massiv, da wir die Schräge der Kurve berücksichtigen.
2. **Simpson-Regel:** Wir fassen immer drei Punkte  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  zusammen und legen eine **Parabel** hindurch. Parabeln schmiegen sich viel besser an „runde“ reale Vorgänge an als Geraden.

---

## Vergleich der Näherungen



Die Herleitung der Simpson-Formel führen wir im Seminar durch.