

# IMA 1: Analysis. Skript Woche 13

Version: 2025-12-23



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or write to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, CA 94105, USA.

Skript generiert von Gemini 3 Pro Preview, gepromptet und in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

## 13 Methoden der analytischen Integration

### ~~Motivation und Einordnung~~

Im vorangegangenen Kapitel haben Sie die numerische Integration als mächtiges Werkzeug kennengelernt, um Flächen näherungsweise zu bestimmen. Doch in den Grundlagen der Elektrotechnik – sei es bei der Berechnung von Feldern, Effektivwerten oder Schaltvorgängen – streben wir nach *exakten, geschlossenen Lösungen*. Wir wollen Formeln erhalten, die uns zeigen, wie ein System von seinen Parametern ( $R, L, C, \omega$ ) abhängt.

Dabei müssen wir uns einer Realität stellen: Die meisten Integrale in der freien Wildbahn sind analytisch nicht lösbar. Ein berühmtes Beispiel ist die Gauß-Funktion  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ . Sie besitzt keine elementare Stammfunktion. Wir konzentrieren uns hier auf jene Integrale, die lösbar sind und das handwerkliche Rückgrat Ihres Studiums bilden.

### 13.1 Die Integraltafel

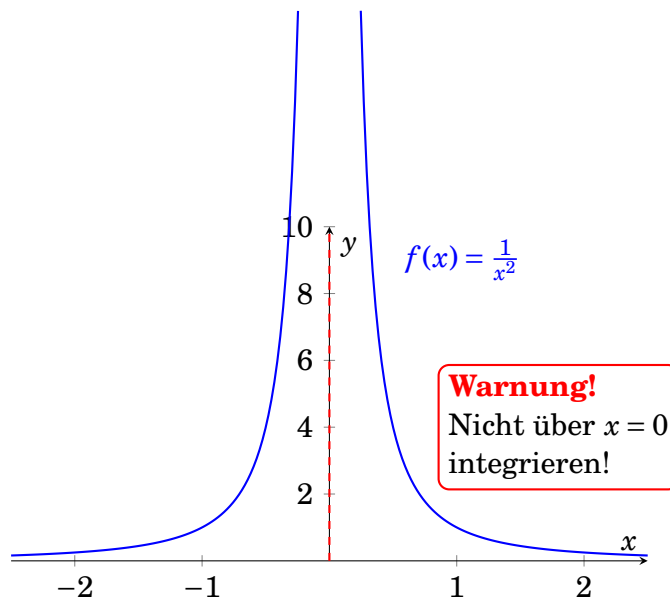
Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** besagt, dass Integration im Wesentlichen die Umkehrung der Differentiation ist. Wir können also unsere bekannte Ableitungstabelle rückwärts lesen. Gesucht ist zu  $f(x)$  eine Funktion  $F(x)$  mit  $F'(x) = f(x)$ .

Funktion $f(x)$	einfachste (!) Stammfunktion $F(x)$	Kommentar
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	Achtung: <del><math>\cos x</math></del> $= -\sin x$ .
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$e^x$	$e^x$	Die e-Funktion ändert sich nicht.
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	Potenzregel.
$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$	Wichtig: Betragstriche setzen! Denn dann geht's auch für negative $x$ . Kettenregel!

### Warnung: Die Polstelle

Ein fataler Fehler ist das Integrieren über eine Definitionslücke. Beispiel:  $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx$ . Die Funktion  $\frac{1}{x^2}$  hat bei  $x = 0$  eine Polstelle. Der Hauptsatz darf hier **nicht** angewendet

werden. Das Integral existiert nicht (es divergiert). Wer hier stur die Regel anwendet ( $[-1/x]_{-1}^2$ ), erhält ein negatives Ergebnis für eine rein positive Fläche – ein offensichtlicher Widerspruch. sogar positiv unendliche Fläche!



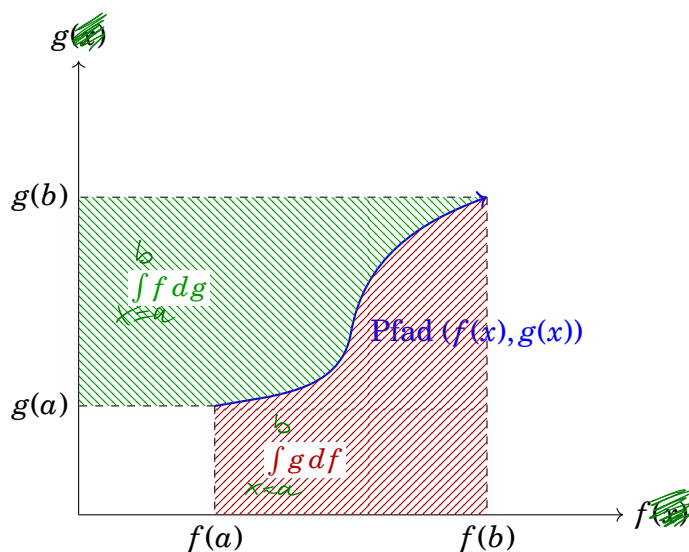
### 13.2 Partielle Integration

Die partielle Integration entsteht durch Umkehrung der **Produktregel**  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ . Wir integrieren beide Seiten der Produktregel von  $a$  bis  $b$  und stellen um:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = \left[ f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

mittels Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Anschauliche Deutung:** Wir betrachten ein Rechteck mit den Seiten  $f(x)$  und  $g(x)$ . Lläuft  $x$  von  $a$  bis  $b$ , ändert sich die Rechtecksfläche  $f \cdot g$ . Diese Gesamtänderung setzt sich zusammen aus der Änderung in  $f$ -Richtung (rote Fläche) und der Änderung in  $g$ -Richtung (grüne Fläche).



### 13.3 Integration durch Substitution

Dies ist das Gegenstück zur Kettenregel.

#### Exakte Herleitung

Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Nun integrieren wir beide Seiten dieser Gleichung bezüglich  $x$  von  $a$  bis  $b$ :

$$\int_a^b \left( \frac{d}{dx}F(g(x)) \right) dx = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Auf der linken Seite wenden wir den Hauptsatz an (Integral hebt Ableitung auf): in gewisser Weise

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Die linke Seite entspricht aber genau dem bestimmten Integral von  $f(u)$  in den Grenzen  $g(a)$  bis  $g(b)$  also:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

#### Anschauliche Rechnung (Ingenieurs-Methode)

Wenn wir ein Integral der Form  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$  sehen, substituieren wir  $u = g(x)$ . oft Wie gehen wir mit dem  $dx$  um? Wir fassen den Differentialquotienten wie einen Bruch auf:

$$g'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow du = g'(x) \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

Nun setzen wir im Integral ein und kürzen:

$$\dots = \int \dots f(u) \frac{du}{dx} dx = \int \dots f(u) \cdot \frac{du}{g'(x)} \cdot g'(x) = \int \dots f(u) du$$

~~Das  $g'(x)$  im Nenner kürzt sich mit dem  $g'(x)$  im Zähler weg.~~ Übrig bleibt ein einfaches Integral über  $u$ . Vergessen Sie nicht, auch die Grenzen von  $x$ -Werten in  $u$ -Werte umzurechnen!

### 13.4 Integration mittels Partialbruchzerlegung

Zum Abschluss betrachten wir ~~gebroschen~~ rationale Funktionen, wie sie bei Übertragungsfunktionen häufig vorkommen. Beispiel:  $f(x) = \frac{x-5}{x^2-3x+2}$ . Wir zerlegen den Nenner:  $(x-1)(x-2)$  und setzen an:

$$\frac{x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Man findet  $A = 4$  und  $B = -3$ .

So einfach klappt das bloß, wenn die Polstellen alle nur die Ordnung 1 haben, es keine echt komplexen Polstellen gibt und der Grad des Zählerpolynoms (strikt!) kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist.

## Überlagerungsprinzip

Graphisch ist die komplexe Funktion (schwarz) die Summe zweier einfacher Hyperbeln (rot und blau). Jeder Pol erzwingt eine vertikale Asymptote.

