IMA 1: Analysis. Skript Woche 14

Version: 2026-01-07

Skript generiert von Gemini 3 Pro Preview, gepromptet und in Grün kommentiert und korrigiert von Jörn Loviscach

14 Einige Anwendungen von Integralen

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir das Integral ~~formal~~ als ~~Grenzwert von Riemann-Summen und operativ~~ als Umkehroperation der Differentiation kennengelernt. Doch in der Ingenieurpraxis, insbesondere in der Elektrotechnik, ist das Integral weit mehr als eine Rechenregel für Stammfunktionen. Es ist das universelle Werkzeug zur *Aufsummierung kontinuierlich veränderlicher Größen*.

Ob Sie die in einem Kondensator gespeicherte Energie berechnen, den Effektivwert einer Wechselspannung bestimmen oder die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen analysieren wollen – stets begegnen Ihnen Integrale. Während die Ableitung uns sagt, was *jetzt gerade* passiert (die Änderungsrate), sagt uns das Integral, was sich über einen *Zeitraum* oder entlang eines *Weges* angesammelt hat.

In diesem Abschnitt betrachten wir fünf klassische geometrische und physikalische Anwendungen. Wir beginnen mit dem Mittelwert, der für die Signalverarbeitung essenziell ist, untersuchen die Arbeit in Kraftfeldern, messen Längen von Kurven und schließen mit einer anschaulichen Betrachtung von Volumina und Oberflächen ab. Dabei werden wir sehen, dass komplexe Formeln oft auf sehr einfachen geometrischen Grundideen basieren.

14.1 Mittelwert einer Funktion

Wie bestimmt man den Durchschnittswert einer Größe, die sich ständig ändert? Nehmen wir als Beispiel eine Spannung $u(t)$, die zeitlich schwankt. Erinnern wir uns an das arithmetische Mittel aus der Statistik. Haben wir N Messwerte $y_1, y_2, \ldots, y_N$, so ist ihr Mittelwert:

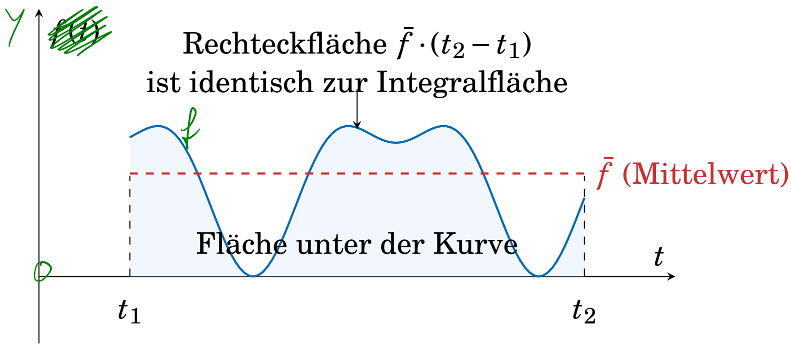
$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i.$$

Wollen wir dies auf eine kontinuierliche Funktion $f(t)$ im Intervall $[t_1, t_2]$ übertragen, zerlegen wir das Zeitintervall in N kleine Abschnitte der Breite $\Delta t = \frac{t_2-t_1}{N}$. Die Anzahl der „Messwerte" ist dann $N = \frac{t_2-t_1}{\Delta t}$. Setzen wir dies in die Summenformel ein:

$$\bar{y} \approx \frac{1}{\frac{t_2-t_1}{\Delta t}}\sum_{i=1}^{N} f(t_i) = \frac{1}{t_2-t_1}\sum_{i=1}^{N} f(t_i)\cdot\Delta t.$$

Lassen wir nun $N \to \infty$ (und damit $\Delta t \to 0$) gehen, wird aus der Summe das Integral.

$$\bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$



Interpretation in der Elektrotechnik: In der Signaltechnik entspricht dieser Mittelwert dem **Gleichanteil** (DC-Komponente) eines Signals. Ist $f(t)$ eine periodische Funktion mit der Periodendauer T, so berechnet sich der Gleichanteil durch Integration über genau eine Periode:

$$U_{\mathrm{DC}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\,dt.$$

Anschaulich bedeutet dies: Man „ebnet" die Wellenberge in die Wellentäler ein, bis eine flache Oberfläche entsteht. Die Höhe dieser Oberfläche ist der Mittelwert. Ist die Fläche oberhalb der t-Achse gleich der Fläche unterhalb (wie bei einem reinen Sinus), ist der Mittelwert Null.

14.2 Arbeit im Kraftfeld

Ein zentrales Konzept der Physik ist die Arbeit. In der Schule lernt man oft: Arbeit = Kraft · Weg. Das gilt jedoch nur, wenn die Kraft konstant ist und genau in Wegrichtung zeigt. Was aber, wenn sich ein geladenes Teilchen auf einer krummen Bahn durch ein inhomogenes elektrisches Feld bewegt?

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld (z. B. eine elektrische Kraft), das vom Ort $\mathbf{x}$ abhängt. Ein Teilchen bewege sich entlang einer Bahnkurve, die durch den zeitabhängigen Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ beschrieben wird, von einem Startzeitpunkt t_1 bis t_2.

In einem winzigen Zeitintervall dt bewegt sich das Teilchen um das Wegstück $d\mathbf{x}$. Dieses infinitesimale Wegstück hängt mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ zusammen über:

$$d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}(t)\,dt.$$

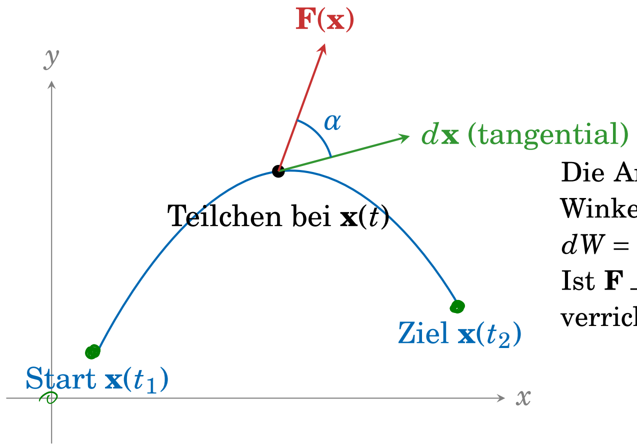
vom Feld am Teilchen

Die verrichtete Arbeit dW in diesem kleinen Stück ist das Skalarprodukt aus Kraft und Wegvektor. Warum das Skalarprodukt? Weil nur der Anteil der Kraft Arbeit verrichtet, der *in Bewegungsrichtung* wirkt. Senkrecht zur Bewegung wirkende Kräfte (wie die Lorentzkraft im Magnetfeld) verrichten keine Arbeit.

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)\,dt.$$

Die Gesamtarbeit W erhalten wir durch Aufsummieren (Integrieren) aller kleinen Arbeitsbeiträge entlang des Weges:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)\, dt$$



Die Arbeit dW hängt vom Winkel α ab:
$dW = |\mathbf{F}||d\mathbf{x}|\cos\alpha$.
Ist $\mathbf{F} \perp d\mathbf{x}$, wird **keine** Arbeit verrichtet.

Diese Formel ist universell. Ob Sie die Arbeit berechnen, die nötig ist, um einen Satelliten in den Orbit zu bringen, oder die Energie, die ein Elektron beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz gewinnt – das Prinzip ist stets: „Kraft mal Weg“ infinitesimal betrachtet und aufintegriert.

14.3 Bogenlänge einer Kurve

Wie lang ist der Draht, der für eine komplex gewickelte Spule benötigt wird? Oder wie lang ist der Flugweg einer Drohne? Geometrisch suchen wir die Länge einer Kurve. Wir nähern die Kurve durch viele kleine geradlinige Stücke an. Nach dem Satz des Pythagoras hat ein winziges Wegstück $d\mathbf{s}$ mit den Komponenten dx, dy, dz die Länge:

$$|d\mathbf{s}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Betrachten wir dies zeitabhängig mit $\mathbf{x}(t)$, so ist der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T$. Die Länge des Geschwindigkeitsvektors ist der *Betrag der Momentangeschwindigkeit* (der „Tacho-Wert“). Wenn Sie 2 Stunden lang mit konstant 100 km/h fahren, legen Sie 200 km zurück. Wenn die Geschwindigkeit schwankt, integrieren Sie den Betrag der Geschwindigkeit über die Zeit:

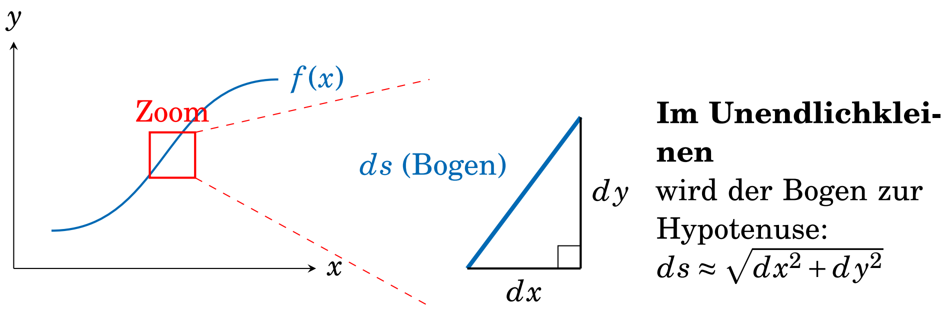
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

Spezialfall: Funktionsgraph Oft ist eine Kurve nicht als $\mathbf{x}(t)$ gegeben, sondern als einfacher Funktionsgraph $y = f(x)$ in der x-y-Ebene. Hier können wir die x-Koordinate selbst als ~~Parameter~~ Zeit t auffassen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

Der Betrag dieses Vektors ist $\sqrt{1^2+(f'(t))^2}$. Benennen wir den Parameter t wieder in x um, erhalten wir die bekannte Formel für die Bogenlänge eines Funktionsgraphen zwischen $x=a$ und $x=b$:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$



14.4 Volumen eines Rotationskörpers

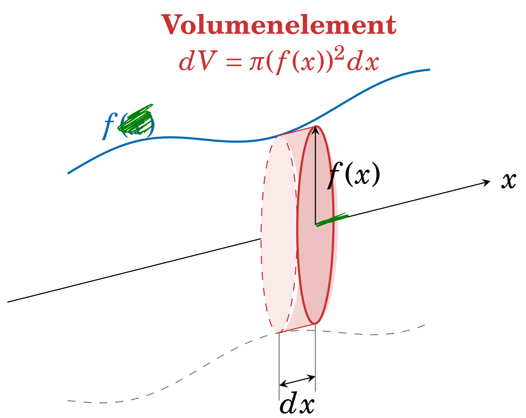
Viele Bauteile in der Elektrotechnik sind rotationssymmetrisch: Koaxialkabel, Isolatoren, Drahtspulen. Solche Körper entstehen, zum Beispiel wenn man den Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse rotieren lässt.

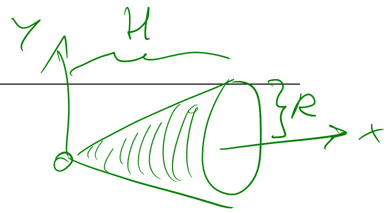
Wie berechnet man deren Volumen? Wir nutzen die Idee des *Scheibenschneidens* (in der Küche vergleichbar mit dem Schneiden einer Gurke in dünne Scheiben). An ~~einer~~ jeder Stelle x hat der Körper einen kreisförmigen Querschnitt. Der Radius dieses Kreises ist genau der Funktionswert $f(x)$. Die Fläche der Kreisscheibe ist also:

$$A(x)=\pi\cdot(f(x))^2.$$

Diese Scheibe hat eine unendlich kleine Dicke dx. Das Volumen dieser einen Scheibe ist Grundfläche mal Höhe, also $dV=\pi(f(x))^2\,dx$. Summieren (integrieren) wir alle Scheiben auf, erhalten wir das Gesamtvolumen:

$$V=\pi\int_{x_{start}}^{x_{ende}}(f(x))^2\,dx$$





Beispiel und Anschauung: Der Kegel und der Faktor 1/3

Betrachten wir einen geraden Kreiskegel mit Höhe H und Radius R. Er entsteht durch Rotation der Geraden $f(x) = \frac{R}{H}x$.

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2\, dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Woher kommt dieser Faktor $\frac{1}{3}$ gegenüber dem Zylinder ($\pi R^2 H$)? Interessanterweise gilt dieser Faktor $\frac{1}{3}$ für *alle* spitz zulaufenden Körper (Pyramiden, schiefe Kegel), solange die Querschnittsfläche quadratisch mit der Höhe wächst.

Das Prinzip von Cavalieri: Stellen Sie sich einen Stapel Münzen vor (einen Zylinder). Wenn Sie den Stapel verschieben, sodass er schief wird, ändert sich das Volumen nicht. Jede „Scheibe“ behält ihr Volumen. Deshalb ist das Volumen eines schiefen Kegels gleich dem eines geraden Kegels gleicher Höhe. und gleichem Flächeninhalt der Grundfläche

Warum genau 1/3? Eine plastische Zerlegung: Man kann dies wunderschön am Würfel verstehen, ganz ohne Integral. Nehmen wir einen Würfel der Kantenlänge a. Sein Mittelpunkt M liegt bei $(a/2, a/2, a/2)$. Wir können den Würfel in 6 identische Pyramiden zerlegen. Jede Pyramide hat als Grundfläche eine der 6 Würfelseiten (Fläche $G = a^2$) und ihre Spitze ist genau im Würfelmittelpunkt M. Die Höhe jeder dieser Pyramiden ist also der halbe Würfelweg: $h = a/2$. Da 6 solcher Pyramiden den Würfel füllen, gilt:

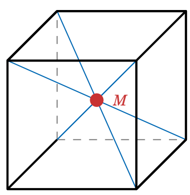
$$V_{\text{Würfel}} = 6 \cdot V_{\text{Pyramide}}$$

$$a^3 = 6 \cdot V_{\text{Pyramide}}$$

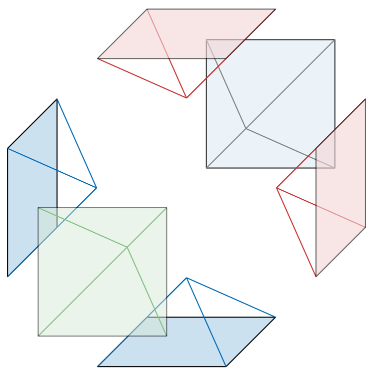
Da $a^2 = G$ (Grundfläche) und $a = 2h$ (doppelte Höhe), folgt:

$$(2h) \cdot G = 6 \cdot V_{\text{Pyramide}} \implies 2hG = 6V_{\text{Pyramide}} \implies V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}Gh.$$

Diese Logik lässt sich (via Grenzwertbetrachtung/Cavalieri) auf den runden Kegel übertragen. Das Integral liefert uns diesen „magischen“ Faktor $\frac{1}{3}$ automatisch durch die Stammfunktion von x^2.



Der Würfel
Zerlegt in 6 Pyramiden
durch die Diagonalen



Explosionsansicht
Alle 6 Pyramiden
sichtbar gemacht

14.5 Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel

Die Kugel ist ein spezieller Rotationskörper. Der $\overbrace{\text{Graph}}^{\text{zu rotierende}}$ ist $\overbrace{\text{ein}}^{\text{am einfachsten}}$ Halbkreis: $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ im Bereich $-R \le x \le R$. Das Volumen berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} V(R) &= \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^{R} = \pi \left((R^3 - \frac{1}{3} R^3) - (-R^3 + \frac{1}{3} R^3) \right) \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - (-\frac{2}{3} R^3) \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

(Archimedes war übrigens so genial, dies bereits ohne Integralrechnung durch Vergleich mit einem Zylinder und einem Kegel herauszufinden – sein Grabstein trug eine entsprechende Skizze).

Der Zusammenhang zwischen Volumen und Oberfläche Nun zur Oberfläche $A(R)$. Wir könnten komplizierte Integrale über Flächen im Raum lösen. Aber es gibt einen viel eleganteren, physikalisch motivierten Weg. Betrachten Sie das Kugelvolumen $V(R)$ als Funktion des Radius. Wenn wir den Radius um ein winziges Stück dR vergrößern, wie viel Volumen kommt hinzu? Stellen Sie sich vor, Sie lackieren eine Kugel. Die Lackschicht hat die Dicke dR. Das Volumen des Lacks dV ist anschaulich:

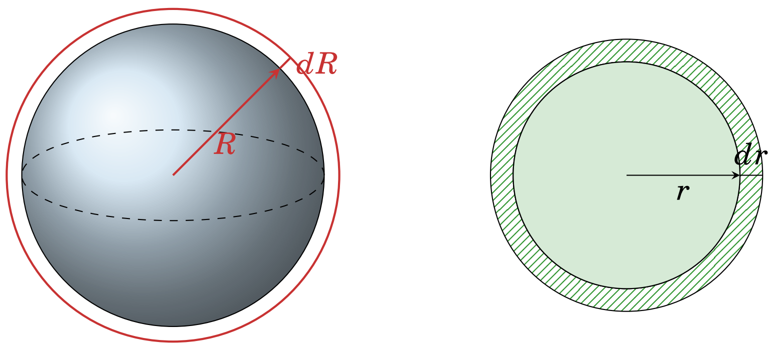
$$\text{Lackvolumen} \approx \text{Oberfläche} * \text{Schichtdicke}$$

$$dV \approx A(R) \cdot dR$$

Mathematisch ausgedrückt ist die Oberfläche also nichts anderes als die Ableitung des Volumens nach dem Radius!

$$A(R) = \frac{dV(R)}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2.$$

Dieser „Zwiebelschalen-Trick“ funktioniert auch beim Kreis: Fläche $F(r) = \pi r^2$. Umfang $U(r) = \frac{dF}{dr} = 2\pi r$. Wenn der Kreis wächst, kommt ein dünner Ring hinzu, dessen Fläche „Umfang mal Dicke“ ist.



Volumenzuwachs
$dV = A(R) \cdot dR$

Flächenzuwachs
$dF = U(r) \cdot dr$

Anschauliche Deutung der Oberfläche $4\pi R^2$**:** Die Formel besagt, dass die Kugeloberfläche genau viermal so groß ist wie die Fläche des größtmöglichen Kreises, der in die Kugel passt (der Äquatorschnitt mit Fläche πR^2). Wenn man eine Orange schält und versucht, die Schalen flach auf den Tisch zu drücken, würden sie (idealisiert) genau vier Kreise mit dem Radius der Orange füllen.

Zusammenfassung: Integrale erlauben uns den Übergang vom Lokalen zum Globalen:

- Vom punktuellen Wert zum Mittelwert.
- Von der Kraft an einem Punkt zur Arbeit entlang eines Weges.
- Von der Momentangeschwindigkeit zur zurückgelegten Strecke.
- Von der Querschnittsfläche zum Volumen.

Für die Elektrotechnik bedeutet das: Wann immer Sie eine Größe haben, die sich räumlich oder zeitlich verteilt oder ändert, ist das Integral Ihr Werkzeug der Wahl.