

# Mathematik 2 für Regenerative Energien

## Klausur vom 7. April 2026: Beispiellösungen

Jörn Loviscach

Versionsstand: 7. April 2026, 09:21:02



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

*Sehr ausführlich formulierte Lösungen von Claude Opus 4.6 (erweitertes Denken) so, wie das  $\LaTeX$  in einem Rutsch aus der KI gekommen ist. In Rot kommentiert von Jörn Loviscach.*

## Aufgabe 1 – Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Eigenwerte.** Wir lösen  $\det(A - \lambda I) = 0$ :

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - (-2) \cdot 1 = (5 - \lambda)(2 - \lambda) + 2.$$

Ausmultiplizieren:

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) + 2 = 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12.$$

Nullstellen:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4.}$$

**Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 3$ .** Wir lösen  $(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$ :

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Erste Zeile:  $2v_1 - 2v_2 = 0$ , also  $v_1 = v_2$ . Wähle  $v_1 = v_2 = 1$ :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oder Vektor  
senkrecht zu  
beiden Zeilen  
suchen.

**Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 4$ .** Wir lösen  $(A - 4I)\vec{v} = \vec{0}$ :

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Erste Zeile:  $v_1 - 2v_2 = 0$ , also  $v_1 = 2v_2$ . Wähle  $v_2 = 1$ :

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Probe.**  $A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_1 \checkmark$       $A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\vec{v}_2 \checkmark$

## Aufgabe 2 – Trennung der Variablen: $y y' = \cos(x)$ , $y(3) = 5$

Die Gleichung  $y y' = \cos x$  ist separabel. Wir schreiben  $y' = \frac{dy}{dx}$  und trennen:

$$y dy = \cos(x) dx.$$

Integration beider Seiten:

$$\int y dy = \int \cos(x) dx \implies \frac{y^2}{2} = \sin(x) + C.$$

oder ohne C:  
 $\int_5^y y dy = \int_3^x \cos(x) dx$

**Anfangsbedingung**  $y(3) = 5$  einsetzen:

$$\frac{25}{2} = \sin(3) + C \implies C = \frac{25}{2} - \sin(3).$$

Also

$$\frac{y^2}{2} = \sin(x) + \frac{25}{2} - \sin(3) \implies y^2 = 2\sin(x) + 25 - 2\sin(3).$$

Da  $y(3) = 5 > 0$ , wählen wir die positive Wurzel:

$$y(x) = \sqrt{2\sin(x) + 25 - 2\sin(3)}.$$

---

### Aufgabe 3 – $y'' + 2y' + 5y = 0$ und Verhalten für $x \rightarrow \infty$

**Charakteristische Gleichung:**

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Mit der Lösungsformel:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Die allgemeine reelle Lösung lautet daher

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

*oder komplex lassen*

**Verhalten für  $x \rightarrow \infty$ :** Der Faktor  $e^{-x}$  geht für  $x \rightarrow \infty$  gegen null, während  $\cos(2x)$  und  $\sin(2x)$  beschränkt bleiben (sie schwanken zwischen  $-1$  und  $1$ ). Somit gilt

$$|y(x)| \leq e^{-x}(|C_1| + |C_2|) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

**Ja, alle Lösungen gehen für  $x \rightarrow \infty$  gegen null.** Anschaulich: der negative Realteil  $-1$  der komplexen Eigenwerte sorgt für eine exponentielle Dämpfung.

### Aufgabe 4 – Taylor-Entwicklung von $f(x) = e^{x^2}$ bei $x_0 = 0$

Die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung lautet

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

**Ableitungen:**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2}, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= 2xe^{x^2}, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2}, & f''(0) &= 2. \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$f(x) = e^{x^2} \approx 1 + x^2.$$

*Alternativ (schneller Weg):* Man kennt  $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \dots$  und setzt  $u = x^2$  ein. Bis zur zweiten Ordnung in  $x$  ist  $u = x^2$  selbst schon zweiter Ordnung, also  $e^{x^2} \approx 1 + x^2$ .

## Aufgabe 5 – Fourier-Koeffizienten $c_0$ und $c_4$

Die Funktion hat die Periode  $T = 3$  und ist auf  $[0, 3)$  definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ -2, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t < 3. \end{cases}$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi n t/T} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) e^{-i2\pi n t/3} dt.$$

$c_0$  (Mittelwert):

$$c_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} \left[ \underbrace{\int_0^1 2 dt}_{=2} + \underbrace{\int_1^2 (-2) dt}_{=-2} + \underbrace{\int_2^3 0 dt}_{=0} \right] = \frac{1}{3} (2 - 2 + 0) = \boxed{0}.$$

$c_4$ : Setze  $\omega := \frac{2\pi \cdot 4}{3} = \frac{8\pi}{3}$ .

$$c_4 = \frac{1}{3} \left[ \int_0^1 2 e^{-i\omega t} dt + \int_1^2 (-2) e^{-i\omega t} dt \right].$$

Berechnung der Teilintegrale mit  $\int e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}$ :

$$c_4 = \frac{2}{3(-i\omega)} \left[ (e^{-i\omega} - 1) - (e^{-2i\omega} - e^{-i\omega}) \right] = \frac{2}{3(-i\omega)} \left[ 2e^{-i\omega} - 1 - e^{-2i\omega} \right].$$

Nun ist  $\omega = \frac{8\pi}{3}$ , also

$$e^{-i\omega} = e^{-i8\pi/3} = e^{-i2\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{-2i\omega} = e^{-i4\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Einsetzen:

$$2e^{-i\omega} - 1 - e^{-2i\omega} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Damit

$$c_4 = \frac{2}{3 \cdot (-i) \cdot \frac{8\pi}{3}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1 + i\sqrt{3}) = \frac{2}{-i8\pi} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1 + i\sqrt{3}) = \frac{3}{i8\pi} (1 + i\sqrt{3}).$$

Multiplizieren mit  $\frac{-i}{-i}$  (d. h.  $\frac{1}{i} = -i$ ):

$$c_4 = \frac{-3i}{8\pi} (1 + i\sqrt{3}) = \frac{-3i - 3i^2\sqrt{3}}{8\pi} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{8\pi} = \boxed{\frac{3(\sqrt{3} - i)}{8\pi}}.$$

nicht gefragt

---

## Aufgabe 6 – Inverse Laplace-Transformation

Gesucht ist  $f(t)$  mit  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{5}{(s-1)(s+4)}$ .

**Partialbruchzerlegung:**

$$\frac{5}{(s-1)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+4}.$$

Multiplikation mit  $(s-1)(s+4)$ :

$$5 = A(s+4) + B(s-1).$$

Einsetzen von  $s = 1$ :  $5 = 5A$ , also  $A = 1$ .

Einsetzen von  $s = -4$ :  $5 = -5B$ , also  $B = -1$ .

Damit

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+4}.$$

Rücktransformation mit  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ :

$$f(t) = e^t - e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

## Aufgabe 7 – Lineares Gleichungssystem mit Parameter $a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(erweiterte Koeffizientenmatrix). Gauß-Elimination:

**Schritt 1:**  $\text{II} \leftarrow \text{II} - 2 \cdot \text{I}$ ,  $\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{I}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3-2a & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 2 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:**  $\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{II}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3-2a & 2 \\ 0 & 0 & (1-a)-(3-2a) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & 3-2a & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

Damit das System unendlich viele Lösungen hat, muss die letzte Zeile komplett null sein (und die rechte Seite ist dort bereits 0). Also brauchen wir

Oder Koeffizientendeterminant betrachten.  $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2.$

**Begründung:** Für  $a = 2$  hat die Koeffizientenmatrix nur Rang 2 bei 3 Unbekannten, die rechte Seite ist aber konsistent (kein Widerspruch  $0 = c \neq 0$ ). Also ist  $z$  eine freie Variable, und es gibt unendlich viele Lösungen.

## Aufgabe 8 – Matrix mit vorgegebenem Bild

Der Spaltenraum (= Bild) soll genau  $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$  sein. Das bedeutet: jede Spalte

der Matrix muss ein Vielfaches von  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  sein, und mindestens eine Spalte muss

davon verschieden von  $\vec{0}$  sein. Einfachste Wahl – jede Spalte gleich diesem Vektor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

noch einfacher:  
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Jede andere Matrix, deren Spalten sämtlich Vielfache von  $(2, -1, 3)^T$  sind und nicht alle null, wäre ebenfalls korrekt.)

**Rang:** Der Spaltenraum ist eindimensional, also  $\text{Rang}(A) = 1$ .

**Defekt (= Dimension des Kerns):** Nach der Dimensionsformel

$$\text{Defekt}(A) = n - \text{Rang}(A) = 3 - 1 = 2.$$

↑ Zahl der Spalten

## Aufgabe 9 – Abstand paralleler Geraden (senkrechte Gerade)

Gegeben sind

$$g_1: y = -3x + 1, \quad g_2: y = -3x + 11.$$

Beide haben Steigung  $-3$ .

**Idee:** Wir legen eine *senkrechte* Gerade durch einen Punkt auf  $g_1$  und bestimmen deren Schnittpunkt mit  $g_2$ . Die Strecke zwischen beiden Punkten ist der Abstand.

**Schritt 1 - Punkt auf  $g_1$  wählen.** Setze  $x = 0$ : der Punkt  $P = (0, 1)$  liegt auf  $g_1$ .

**Schritt 2 - Senkrechte Gerade durch  $P$ .** Die Geraden haben Steigung  $m = -3$ . Eine dazu senkrechte Gerade hat die Steigung

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m} = \frac{1}{3}.$$

Die Senkrechte durch  $P = (0, 1)$  ist also

$$h: y = \frac{1}{3}x + 1.$$

**Schritt 3 - Schnittpunkt von  $h$  mit  $g_2$ .**

$$\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 11 \implies \frac{1}{3}x + 3x = 10 \implies \frac{10}{3}x = 10 \implies x = 3.$$

$$y = -3 \cdot 3 + 11 = 2.$$

Also ist der Schnittpunkt  $Q = (3, 2)$ .

**Schritt 4 - Abstand berechnen.**

$$d = |PQ| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \boxed{\sqrt{10}}.$$

## Aufgabe 10 - DGL rekonstruieren aus allgemeiner Lösung

Gegeben ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = C e^{-3x} + 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Ableiten:**

$$y' = -3C e^{-3x}.$$

Aus der allgemeinen Lösung lesen wir ab:  $C e^{-3x} = y - 2$ . Also

$$y' = -3(y - 2) = -3y + 6.$$

Eigentlich dachte ich mir das mit Vektorrechnung:

$$\begin{aligned} g_1 &: r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ g_2 &: s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} \\ h &: v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 \cap h &= \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ klar!} \\ g_2 \cap h &: s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10s - 33 &= 0 - 3 \\ \downarrow \cdot (-3) \\ 10s - 33 &= 0 - 3 \\ \downarrow +3 \\ 10s &= 3 \\ \downarrow :10 \\ s &= \frac{3}{10} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Umgestellt:

$$y' + 3y = 6.$$

Das ist eine lineare DGL erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten.

**Kontrolle:** Die homogene Lösung  $y_h = Ce^{-3x}$  und die partikuläre (konstante) Lösung  $y_p = 2$  (denn  $0 + 3 \cdot 2 = 6 \checkmark$ ) ergeben zusammen  $y = Ce^{-3x} + 2$ .

## Aufgabe 11 – Doppelintegral in Polarkoordinaten

Gesucht ist

$$\iint_K (3 + \sqrt{x^2 + y^2}) dA,$$

wobei  $K$  die Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 4$  (Radius 2) ist.

**Substitution**  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $dA = r dr d\varphi$ , und  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (3+r)r dr d\varphi.$$

Das innere Integral hängt nicht von  $\varphi$  ab, also

$$= 2\pi \int_0^2 (3r + r^2) dr = 2\pi \left[ \frac{3r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = 2\pi \left( \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{8}{3} \right) = 2\pi \left( 6 + \frac{8}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{26}{3}.$$

$$\boxed{\iint_K (3 + \sqrt{x^2 + y^2}) dA = \frac{52\pi}{3}.$$

## Aufgabe 12 – Kritische Punkte von $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

**Notwendige Bedingung** (horizontale Tangentialebene  $\Leftrightarrow \nabla f = \vec{0}$ ):

$$\begin{aligned} f_x = 3x^2 - 3y = 0 &\implies y = x^2, \\ f_y = -3x + 3y^2 = 0 &\implies x = y^2. \end{aligned}$$

unsere Schreibweise:  
 $\frac{\partial f}{\partial x}$   
 $\frac{\partial f}{\partial y}$

Einsetzen von  $y = x^2$  in  $x = y^2$ :

$$x = (x^2)^2 = x^4 \implies x^4 - x = 0 \implies x(x^3 - 1) = 0.$$

---

Also  $x = 0$  (dann  $y = 0$ ) oder  $x = 1$  (dann  $y = 1$ ).

Die **kritischen Punkte** sind **(0,0)** und **(1,1)**.

**Klassifikation mit der Hesse-Matrix.**

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3.$$

unser  
Schreibweise:  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 36xy - 9.$$

**Am Punkt (0,0):**

$$D = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt (kein lokales Extremum).}$$

(Anschaulich: In manchen Richtungen geht  $f$  nach oben, in anderen nach unten.)

**Am Punkt (1,1):**

$$D = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0, \quad f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Minimum.}$$

Der Funktionswert dort ist  $f(1,1) = 1 - 3 + 1 = -1$ .